

Francisco Paulo Alves de Oliveira Filho

Estatística, demografia e econometria espacial

na leitura da economia
dos estados brasileiros



2025 - Thesis Editora Científica

Copyright © Thesis Editora Científica.

Copyright do texto © 2025 O autor.

Copyright da edição © 2025 Thesis Editora Científica

Direitos para esta edição cedidos à Thesis Editora Científica pelo autor.

Open access publication by Thesis Editora Científica.

Editor Chefe: Felipe Cardoso Rodrigues Vieira.

Diagramação, Projeto Gráfico e Design da Capa: Thesis Ed. Cien.

Revisão: O autor.



Licença Creative Commons

Estatística, demografia e econometria espacial na leitura da economia dos estados brasileiros
da Thesis Editora Científica está licenciada com uma Licença Creative Commons - Atribuição-
NãoComercial-SemDerivações 4.0 Internacional. (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo da obra e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade é de responsabilidade exclusiva do autor, não representando a posição oficial da Thesis Editora Científica. É permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos ao autor, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares (*blind peer review*), membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

ISBN: 978-65-83199-81-2

Thesis Editora Científica
Teresina – PI – Brasil
contato@thesiseditora.com.br
www.thesiseditora.com.br

Estatística, demografia e econometria espacial na leitura da economia dos estados brasileiros

Francisco Paulo Alves de Oliveira Filho

CONSELHO EDITORIAL

Felipe Cardoso Rodrigues Vieira – lattes.cnpq.br/9585477678289843
Adilson Tadeu Basquerote Silva – lattes.cnpq.br/8318350738705473
Andréia Barcellos Teixeira Macedo – lattes.cnpq.br/1637177044438320
Eliana Napoleão Cozendey da Silva – lattes.cnpq.br/2784584976313535
Rodolfo Ritchelle Lima dos Santos – lattes.cnpq.br/8295495634814963
Luís Carlos Ribeiro Alves – lattes.cnpq.br/9634019972654177
João Vitor Andrade – lattes.cnpq.br/1079560019523176
Bruna Aparecida Lisboa – lattes.cnpq.br/1321523568431354
Júlio César Coelho do Nascimento – lattes.cnpq.br/7514376995749628
Ana Paula Cordeiro Chaves – lattes.cnpq.br/4006977507638703
Stanley Keynes Duarte dos Santos – lattes.cnpq.br/3992636884325637
Brena Silva dos Santos – lattes.cnpq.br/8427724475551636
Jessica da Silva Campos – lattes.cnpq.br/7849599391816074
Milena Cordeiro de Freitas – lattes.cnpq.br/5913862860839738
Thiago Alves Xavier dos Santos – lattes.cnpq.br/4830258002967482
Clarice Bezerra – lattes.cnpq.br/8568045874935183
Bianca Thaís Silva do Nascimento – lattes.cnpq.br/4437575769985694
Ana Claudia Rodrigues da Silva – lattes.cnpq.br/6594386344012975
Francisco Ronner Andrade da Silva – lattes.cnpq.br/5014107373013731
Maria Isabel de Vasconcelos Mavignier Neta – lattes.cnpq.br/8440258181190366
Anita de Souza Silva – lattes.cnpq.br/9954744050650291
Sara Milena Gois Santos – lattes.cnpq.br/6669488863792604
Leônidas Luiz Rubiano de Assunção – lattes.cnpq.br/4636315219294766
Jose Henrique de Lacerda Furtado – lattes.cnpq.br/8839359674024233
Noeme Madeira Moura Fé Soares – lattes.cnpq.br/7107491370408847
Luciene Rodrigues Barbosa – lattes.cnpq.br/2146096901386355
Mário César de Oliveira – lattes.cnpq.br/8924508898024445
Antonio da Costa Cardoso Neto – lattes.cnpq.br/9036328153320126
Elisabete Soares de Santana – lattes.cnpq.br/1149505575311414
Thiago Santos Borges – lattes.cnpq.br/4495115911159968
Alessandra Souza dos Santos – lattes.cnpq.br/5313671194713784
Mateus Henrique Dias Guimarães – lattes.cnpq.br/7137001589681910
Emelyn Glorys Herasme Henríquez – lattes.cnpq.br/7314295633439757
George Luiz Nérís Caetano – lattes.cnpq.br/0598052051026256



2025 - Thesis Editora Científica

Copyright © Thesis Editora Científica.

Copyright do texto © 2025 O autor.

Copyright da edição © 2025 Thesis Editora Científica

Direitos para esta edição cedidos à Thesis Editora Científica pelo autor.

Open access publication by Thesis Editora Científica.

Editor Chefe: Felipe Cardoso Rodrigues Vieira.

Diagramação, Projeto Gráfico e Design da Capa: Thesis Ed. Cien.

Revisão: O autor.

Catálogo na Publicação
Elaborada por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

O48e

Oliveira Filho, Francisco Paulo Alves de

Estatística, demografia e econometria espacial na leitura da economia dos estados brasileiros / Francisco Paulo Alves de Oliveira Filho. – Teresina-PI: Thesis Editora Científica, 2025.

Livro em PDF

ISBN 978-65-83199-81-2

1. Econometria. 2. Estatística econômica. 3. Demografia. I. Oliveira Filho, Francisco Paulo Alves de. II. Título.

CDD 330.015195

Índice para catálogo sistemático

I. Econometria

Thesis Editora Científica
Teresina – PI – Brasil
contato@thesiseditora.com.br
www.thesiseditora.com.br

SOBRE O AUTOR



Francisco Paulo Alves de Oliveira Filho é bacharel em Finanças pela Universidade Federal do Ceará, mestre em Economia pelo CAEN/UFC e doutorando em Economia pela mesma instituição. Foi aprovado em primeiro lugar na seleção pública para professor temporário de 40 horas da UECE, em 2025, e atua como professor substituto do Departamento de Teoria Econômica da UFC. Sua trajetória de ensino e pesquisa concentra-se em métodos quantitativos aplicados à Economia e às Finanças, com ênfase em Econometria Aplicada e Teórica, Estatística, Microeconomia, Teoria Econômica e Teoria Moderna das Finanças e Estudos Quantitativos Aplicados a Demografia e Políticas Públicas.

APRESENTAÇÃO

A relação entre população e economia se materializa no território antes mesmo de ser convertida em séries, taxas ou indicadores, pois diferenças no ritmo de crescimento, na composição etária, na densidade de ocupação e nos movimentos migratórios alteram simultaneamente a oferta de trabalho, a demanda por serviços públicos, a escala dos mercados e a organização espacial da produção. Quando essas dimensões são comparadas entre os estados brasileiros, a hipótese de que cada unidade possa ser tratada como observação isolada torna-se pouco plausível, já que fluxos de pessoas, mercadorias, capital, infraestrutura e informação atravessam fronteiras administrativas e produzem interdependências relevantes para a análise quantitativa.

Ao longo de décadas, a literatura demográfica consolidou instrumentos rigorosos para decompor a mudança populacional em seus componentes, enquanto a estatística e a econometria desenvolveram procedimentos capazes de resumir heterogeneidades, estimar associações condicionais e quantificar a incerteza. A econometria espacial amplia esse arcabouço ao admitir que o resultado observado em uma unidade pode estar relacionado ao desempenho, às características ou aos choques das unidades vizinhas. O argumento desenvolvido neste volume nasce dessa continuidade conceitual e procura integrar mensuração demográfica, inferência estatística e estrutura territorial em uma mesma lógica de investigação.

A heterogeneidade territorial, econômica e demográfica do Brasil oferece um campo particularmente adequado para essa abordagem, uma vez que as 27 unidades da Federação diferem amplamente em extensão territorial, densidade, ritmo de crescimento populacional, estrutura produtiva e produto por habitante. Essas diferenças também não se distribuem de forma aleatória no mapa: corredores econômicos, áreas metropolitanas, fronteiras agrícolas, sistemas de transporte e redes logísticas conectam estados de diferentes regiões e tornam plausível a presença de autocorrelação espacial. A aplicação empírica apresentada nos capítulos finais explora essa configuração para investigar como a incorporação explícita da vizinhança modifica os resultados e a interpretação obtidos em regressões convencionais.

A formalização matemática acompanha o desenvolvimento do argumento e é introduzida sempre que uma medida, um estimador ou um parâmetro se torna necessário para compreender o fenômeno analisado. As identidades demográficas conduzem à construção dos indicadores, a matriz de pesos traduz a estrutura de vizinhança e os multiplicadores espaciais conectam coeficientes estruturais a impactos diretos e indiretos. A matemática cumpre, portanto, uma função analítica: explicitar hipóteses, mecanismos de transmissão e limites inferenciais, em vez de constituir um bloco separado da interpretação substantiva.

Como o crescimento populacional pode responder às próprias oportunidades econômicas, variáveis omitidas podem afetar simultaneamente renda e dinâmica demográfica e a amostra estadual é necessariamente pequena, a aplicação empírica deve ser interpretada como associativa e exploratória. A comparação entre MQO, SAR, SEM e SDM serve, nesse contexto, para confrontar diferentes representações da dependência territorial, sem transformar correlações entre população e produto em relações causais automáticas. A interpretação dos resultados permanece ancorada na coerência entre hipótese econômica, estrutura espacial, diagnóstico dos resíduos e magnitude dos impactos estimados.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO — DA POPULAÇÃO AO TERRITÓRIO	10
CAPÍTULO 1 — A POPULAÇÃO EM MOVIMENTO: ESTOQUES, FLUXOS E CRESCIMENTO.....	12
CAPÍTULO 2 — FECUNDIDADE, MORTALIDADE E ENVELHECIMENTO: A ARQUITETURA DA MUDANÇA DEMOGRÁFICA	17
CAPÍTULO 3 — DA FOTOGRAFIA AO FUTURO: PROJEÇÕES, COORTES E CENÁRIOS	23
CAPÍTULO 4 — ESTATÍSTICA APLICADA À LEITURA ECONÔMICA DOS ESTADOS BRASILEIROS	28
CAPÍTULO 5 — QUANDO A VIZINHANÇA ENTRA NA ANÁLISE: DEPENDÊNCIA E AUTOCORRELAÇÃO ESPACIAL	36
CAPÍTULO 6 — ECONOMETRIA ESPACIAL POR DENTRO: MQO, SAR, SEM E SDM	43
CAPÍTULO 7 — UMA APLICAÇÃO AOS ESTADOS BRASILEIROS: DEMOGRAFIA, VIZINHANÇA E PRODUTO POR HABITANTE	50
CAPÍTULO 8 — ROBUSTEZ, LIMITES E IMPLICAÇÕES PARA POLÍTICAS PÚBLICAS	61
CONCLUSÕES GERAIS.....	68
REFERÊNCIAS	70

INTRODUÇÃO — DA POPULAÇÃO AO TERRITÓRIO

Para o planejamento econômico e social, contar habitantes é apenas o ponto de partida, porque o tamanho do estoque populacional adquire significado quando é relacionado à composição por idade, à distribuição territorial e aos fluxos que o transformam ao longo do tempo. Duas unidades com populações semelhantes podem enfrentar demandas muito diferentes se uma concentra crianças e jovens e a outra apresenta maior proporção de idosos; de modo semelhante, densidades e padrões migratórios distintos alteram os custos de provisão de serviços, a mobilidade e a organização dos mercados de trabalho.

A demografia formal organiza essa dinâmica distinguindo estoques e fluxos: o estoque corresponde à população observada em determinado instante, enquanto nascimentos, óbitos, imigração e emigração explicam sua variação entre dois momentos (Carvalho; Sawyer; Rodrigues, 1998). A equação compensadora transforma essa relação em identidade contábil e estabelece um princípio metodológico decisivo para a análise: mudanças agregadas devem ser decompostas antes de receber interpretação econômica, pois a mesma variação populacional pode resultar de combinações muito diferentes de crescimento natural e migração.

A comparação consistente entre territórios exige indicadores construídos com denominadores, estruturas etárias, horizontes temporais e escalas de mensuração compatíveis. Totais populacionais precisam ser convertidos em taxas quando os denominadores diferem; taxas brutas de mortalidade e natalidade podem requerer padronização quando a composição etária não é comparável; séries intercensitárias demandam medidas de crescimento coerentes com o período observado; e relações entre variáveis econômicas e demográficas devem ser examinadas com procedimentos inferenciais capazes de distinguir co-movimento simples de associação condicional. A qualidade da análise depende, portanto, tanto da definição substantiva do indicador quanto da adequação do estimador ao problema investigado.

A incorporação da dimensão territorial torna mais exigente a hipótese de independência entre observações, pois os estados brasileiros compartilham fronteiras, infraestrutura, cadeias produtivas e fluxos migratórios. O resultado econômico observado em uma unidade pode refletir não apenas suas características internas, mas também condições existentes no entorno; em processos organizados espacialmente, tratar cada estado como uma observação isolada pode ocultar parte relevante dos mecanismos que produzem os padrões demográficos e econômicos registrados nos dados.

A análise espacial formaliza essa interdependência por meio de estatísticas e modelos construídos para representar conexões entre unidades. O índice global de Moran avalia se valores semelhantes tendem a se concentrar em áreas conectadas (Moran, 1950), enquanto os

indicadores locais de associação espacial identificam configurações territoriais específicas (Anselin, 1995). A econometria espacial avança do diagnóstico para a especificação ao representar a dependência diretamente no modelo: no SAR, por meio da defasagem espacial da variável dependente; no SEM, pela correlação espacial dos choques; e no SDM, pela combinação entre resultados e características observadas das unidades vizinhas (Anselin, 1988; LeSage; Pace, 2009).

Os capítulos seguem esse encadeamento metodológico para que cada instrumento apareça como resposta a um problema analítico previamente definido. A primeira parte estabelece medidas de estoque, fluxo, crescimento, fecundidade, mortalidade, sobrevivência e projeção; a segunda introduz os instrumentos estatísticos necessários à comparação das unidades federativas e à estimação de relações condicionais; e a terceira formaliza a vizinhança por meio da matriz de pesos espaciais e desenvolve os modelos econométricos utilizados na aplicação. O percurso é cumulativo, preservando a continuidade entre demografia descritiva, inferência estatística e econometria espacial.

A aplicação empírica é construída a partir de uma seção transversal das 27 unidades da Federação, tendo o produto interno bruto per capita de 2023 como variável econômica de interesse e a densidade demográfica e o crescimento populacional acumulado entre 2010 e 2022 como dimensões selecionadas da estrutura e da dinâmica demográfica. A especificação parcimoniosa foi escolhida para tornar visíveis os efeitos da modelagem espacial sobre ajuste, autocorrelação residual e decomposição dos impactos, sem sugerir que essas covariáveis esgotem os determinantes da renda estadual.

O eixo analítico do volume combina mensuração, inferência e território em uma sequência na qual cada etapa responde a uma limitação da anterior. Taxas tornam comparáveis populações de tamanhos distintos; padronizações reduzem distorções associadas à composição etária; regressões condicionam relações que a correlação isolada não separa; e modelos espaciais passam a ser necessários quando a localização deixa estrutura sistemática nos resultados ou nos erros. Essa articulação permite tratar demografia e economia regional como dimensões de um mesmo problema empírico, preservando os limites inferenciais próprios de cada procedimento.

CAPÍTULO 1 — A POPULAÇÃO EM MOVIMENTO: ESTOQUES, FLUXOS E CRESCIMENTO

A população observada em determinado momento reúne os efeitos acumulados de eventos demográficos ocorridos anteriormente e, entre dois censos, a variação do estoque sintetiza nascimentos, óbitos e movimentos migratórios. A equação compensadora decompõe essa mudança em crescimento natural e saldo migratório, evitando que o resultado agregado seja confundido com os mecanismos que o produziram (Carvalho; Sawyer; Rodrigues, 1998).

Se P_0 representa a população no início de um intervalo e P_t a população no final, o balanço demográfico pode ser escrito como

$$P_t = P_0 + B - D + I - E$$

em que B é o número de nascimentos, D o número de óbitos, I a imigração e E a emigração. Os dois primeiros componentes formam o crescimento vegetativo, enquanto $I - E$ representa o saldo migratório. A identidade não é um modelo probabilístico; ela precisa fechar contabilmente quando todos os eventos são medidos no mesmo período e com cobertura adequada. Sua utilidade está em revelar que “crescimento” é um resultado e não uma causa.

Ao separar mecanismos capazes de produzir a mesma variação total, a identidade compensadora mostra que crescimento natural positivo e saldo migratório negativo podem se compensar, assim como fluxos intensos em sentidos opostos podem coexistir com estabilidade do estoque. A distinção é economicamente relevante porque nascimentos e migração de adultos alteram a composição etária e a demanda por serviços por canais diferentes.

Além de organizar a relação entre estoques e fluxos, a identidade de fechamento contábil funciona como uma verificação inicial da qualidade das fontes, pois incompatibilidades podem sinalizar problemas de cobertura, alterações territoriais, sub-registro ou diferenças no período de referência. Realizar esse confronto antes da modelagem reduz o risco de interpretar inconsistências da base como se fossem variações demográficas efetivas.

Depois de estabelecida a coerência entre estoques e fluxos, torna-se necessário converter diferenças absolutas em medidas comparáveis entre populações de tamanhos distintos. O ganho de 100 mil habitantes em uma unidade e de 50 mil em outra, por exemplo, não permite concluir que a primeira cresceu mais em termos relativos sem que se conheçam os estoques iniciais. A taxa de crescimento aritmética simples para um intervalo pode ser escrita como

$$g = \frac{P_t - P_0}{P_0} \times 100$$

Ao normalizar a mudança pelo tamanho da população de referência, a taxa de crescimento relativa torna comparáveis variações que, em termos absolutos, podem representar intensidades muito distintas entre territórios de escalas diferentes. Sua interpretação precisa

considerar simultaneamente o período de observação e a qualidade dos estoques populacionais utilizados.

Valores absolutos continuam indispensáveis para dimensionar a demanda total, enquanto as taxas são mais adequadas à comparação de ritmos; essa diferença entre volume e intensidade reaparece, com adaptações próprias, nas medidas de migração, mortalidade e fecundidade.

Quando o intervalo cobre vários anos, a taxa geométrica anual traduz a variação em um ritmo composto. Partindo de $P_t = P_0(1 + r)^n$, isola-se r :

$$r = \left(\frac{P_t}{P_0}\right)^{1/n} - 1$$

Em intervalos plurianuais, a taxa geométrica anual expressa o ritmo constante que reproduziria a variação observada sob crescimento composto, sem supor que a trajetória efetiva tenha permanecido uniforme ao longo de todo o período. Sua função é oferecer uma referência comparável entre unidades e intervalos temporais distintos.

Ao evitar a divisão mecânica da variação acumulada pelo número de anos, a taxa geométrica torna comparáveis trajetórias intercensitárias de expansão, estabilidade ou declínio e preserva a lógica do crescimento composto.

Entre 2010 e 2022, as unidades da Federação exibiram ritmos de crescimento bastante heterogêneos: Roraima, Santa Catarina e Mato Grosso registraram expansão acumulada elevada, enquanto Alagoas e Rio de Janeiro apresentaram variações muito pequenas. Esses contrastes não constituem explicações por si mesmos, pois podem resultar de combinações distintas de saldo natural, migração interna e internacional, estrutura etária e mudanças econômicas; por isso, a leitura demográfica exige decompor o indicador agregado antes de relacioná-lo ao desempenho econômico.

A densidade demográfica adiciona uma dimensão territorial ao estoque populacional. Se A é a área em quilômetros quadrados, então

$$d = \frac{P}{A}$$

Ao relacionar população e área, a densidade demográfica acrescenta uma dimensão territorial ao estoque, mas não deve ser confundida com urbanização ou aglomeração econômica. Unidades extensas podem concentrar habitantes em poucos centros e manter vastas áreas rarefeitas; na aplicação empírica, a densidade estadual funciona como uma aproximação da intensidade de ocupação do território, e suas limitações são retomadas quando se discute a escala geográfica.

Uma vez descrito o tamanho da população, a estrutura etária acrescenta uma dimensão indispensável à interpretação de suas necessidades econômicas e sociais. O índice de

dependência relaciona a população em idades usualmente consideradas dependentes àquela situada em idade potencialmente ativa e, em uma versão simplificada, pode ser expresso por

$$RD = \frac{P_{0-14} + P_{\geq 65}}{P_{15-64}} \times 100$$

A razão de dependência sintetiza a relação entre grupos etários potencialmente dependentes e a população em idade potencialmente ativa, sem classificar a situação econômica de cada indivíduo. Mudanças persistentes nesse indicador sinalizam, contudo, alterações na pressão potencial exercida sobre famílias, sistemas previdenciários e serviços públicos.

A interpretação econômica da razão de dependência depende de sua composição, pois reduções da dependência infantil podem abrir uma janela demográfica favorável, enquanto aumentos posteriores da dependência idosa deslocam o desafio para produtividade, saúde e previdência. Um mesmo valor agregado pode, assim, corresponder a estruturas populacionais muito diferentes conforme o peso relativo de crianças e idosos.

A razão de envelhecimento destaca a relação entre idosos e crianças. Uma forma corrente é

$$IE = \frac{P_{\geq 65}}{P_{0-14}} \times 100$$

Entre os indicadores que sintetizam a transformação da estrutura etária, a razão de envelhecimento compara a população idosa à infantil e pode crescer mesmo quando o estoque total se modifica pouco. Esse movimento costuma refletir a combinação entre coortes infantis menores e maior sobrevivência em idades avançadas, com repercussões sobre consumo, poupança, oferta de trabalho e demanda por cuidados.

A conexão com a produção pode ser formalizada por uma identidade per capita. Escrevendo produto total como Y , emprego ou população ocupada como L e população como P ,

$$\frac{Y}{P} = \frac{Y}{L} \times \frac{L}{P}$$

O produto por habitante pode aumentar porque a produtividade por trabalhador, Y/L , cresce; porque aumenta a proporção de pessoas ocupadas, L/P ; ou por ambos os movimentos. O envelhecimento, a migração e as mudanças na participação no mercado de trabalho atuam principalmente sobre o segundo termo, enquanto tecnologia, capital e organização produtiva afetam fortemente o primeiro. Essa decomposição simples impede uma leitura determinista na qual “mais população” automaticamente significa “mais renda”.

Ao decompor a renda per capita entre produtividade por pessoa ocupada e proporção da população ocupada, a identidade evidencia que mudanças na estrutura etária, na participação laboral e na migração podem reforçar ou compensar ganhos de produtividade. O efeito

econômico do crescimento populacional, portanto, não possui sinal único e depende da composição do processo demográfico e das condições produtivas.

A mesma decomposição chama atenção para o papel da composição setorial e da mobilidade laboral, que podem sustentar níveis elevados de produto por habitante em contextos de densidade e crescimento populacional bastante distintos.

1.1 Migração, urbanização e tempo de duplicação

O saldo migratório pode ser transformado em taxa para que territórios de tamanhos distintos sejam comparados. Se $SM = I - E$ é o saldo líquido e P_m a população média do intervalo, uma taxa migratória líquida simples é

$$TML = \frac{SM}{P_m} \times 1.000$$

Transformado em taxa, o saldo migratório permite comparar entradas e saídas líquidas entre territórios de tamanhos diferentes: o fluxo absoluto informa a escala do movimento, enquanto a taxa revela sua intensidade relativa.

A seletividade da migração por idade, escolaridade e ocupação faz com que os deslocamentos populacionais alterem simultaneamente a composição demográfica das áreas de origem e de destino. Quando um território perde sobretudo pessoas de 20 a 34 anos, por exemplo, sua razão de dependência pode aumentar mesmo sem crescimento do número absoluto de idosos; no destino, o mesmo fluxo pode ampliar a população ativa, elevar os nascimentos futuros e pressionar moradia e transporte. Um único movimento migratório pode, assim, produzir efeitos demográficos de sinais distintos nos dois lados do fluxo.

A urbanização introduz outra forma de concentração. A taxa de urbanização pode ser escrita como

$$U = \frac{P_{urb}}{P} \times 100$$

Embora informe a proporção de residentes em áreas urbanas, a taxa de urbanização não se confunde com densidade demográfica, porque uma unidade pode ser altamente urbanizada e ainda apresentar baixa densidade média quando a população se concentra em poucos núcleos.

Uma medida útil para comunicar ritmos de crescimento é o tempo de duplicação. Sob crescimento contínuo $P_t = P_0 e^{rt}$, o tempo T_2 necessário para dobrar satisfaz $2 = e^{rT_2}$, logo

$$T_2 = \frac{\ln 2}{r}$$

Ao converter uma taxa contínua de crescimento em horizonte temporal, o tempo de duplicação facilita a leitura de efeitos acumulados, mas sua utilidade depende da persistência da taxa considerada. Em populações sujeitas à transição da fecundidade, ao envelhecimento ou

a mudanças migratórias, o indicador deve ser interpretado apenas como referência descritiva, e não como previsão mecânica.

Reduzir a população ao papel de denominador do PIB per capita elimina justamente os mecanismos pelos quais sua composição e sua distribuição territorial podem influenciar o desempenho regional. Migração modifica oferta de trabalho e demanda, urbanização altera o acesso a mercados e a seletividade por idade e qualificação transforma a composição do estoque populacional; nos modelos espaciais, densidade e crescimento condensam parte desses processos e, por essa razão, recebem interpretação estritamente associativa.

Ao final deste capítulo, o estoque populacional deve ser entendido como resultado de fluxos, ritmos e estruturas distribuídos de maneira desigual no território, e não como uma quantidade estática. O capítulo seguinte aprofunda essa lógica ao examinar os eventos vitais que transformam a composição da população e condicionam suas trajetórias futuras.

CAPÍTULO 2 — FECUNDIDADE, MORTALIDADE E ENVELHECIMENTO: A ARQUITETURA DA MUDANÇA DEMOGRÁFICA

A estrutura etária observada em determinado momento é o resultado acumulado da interação entre fecundidade, mortalidade e migração: a queda da mortalidade amplia a sobrevivência das coortes, a redução da fecundidade diminui o tamanho relativo das gerações mais jovens e os fluxos migratórios podem acelerar ou atenuar essas mudanças conforme sua seletividade por idade. A transição demográfica deve, por isso, ser compreendida como um processo cumulativo que modifica simultaneamente o tamanho e a composição da população (Preston; Heuveline; Guillot, 2001).

A mortalidade costuma ser apresentada inicialmente por uma taxa bruta. Se D é o número de óbitos no ano e P_m a população no meio do período,

$$TBM = \frac{D}{P_m} \times 1.000$$

A taxa bruta de mortalidade resume a frequência de óbitos em relação à população exposta ao risco, mas sua comparação entre territórios exige cuidado porque o risco de morte cresce acentuadamente nas idades avançadas. Populações mais envelhecidas podem apresentar taxas brutas superiores mesmo quando suas condições de sobrevivência por idade são melhores, de modo que a composição etária pode confundir a interpretação do indicador agregado.

A limitação das taxas brutas leva ao uso de taxas específicas por idade, que relacionam eventos e exposições dentro de grupos demograficamente mais homogêneos. Ao controlar a idade no próprio denominador, essa desagregação reduz o efeito da composição estrutural e permite comparar perfis de mortalidade com maior precisão.

Para um grupo etário x a $x + n$, escreve-se

$$m_x = \frac{D_x}{P_x}$$

Ao distinguir o volume de eventos da intensidade do risco, as taxas específicas evitam que um número absoluto maior de óbitos seja interpretado automaticamente como pior condição de mortalidade. Uma população pode registrar mais mortes simplesmente por concentrar mais pessoas em determinado grupo etário; a comparação adequada exige, portanto, denominadores correspondentes à exposição de cada grupo e atenção à qualidade dos registros de óbitos e de população.

A padronização por idade formaliza essa lógica. Se w_x é a participação de cada grupo etário em uma população padrão e m_x a taxa específica da região, a taxa padronizada direta é

$$M^* = \sum_x w_x m_x$$

A padronização direta recompõe as taxas específicas de cada população sobre uma mesma estrutura etária de referência e, por construção, retira da comparação a parcela das diferenças brutas atribuível à composição por idade. O resultado é uma medida sintética mais comparável entre territórios, embora sua interpretação dependa da escolha da população padrão e da estabilidade das taxas específicas utilizadas.

Embora produza um indicador sintético apropriado para comparar populações com estruturas etárias distintas, a taxa padronizada não substitui o exame das taxas específicas por idade. A distribuição etária revela em quais faixas se concentram as diferenças resumidas pela medida agregada, informação especialmente relevante quando políticas de saúde, assistência ou previdência respondem a riscos muito diferentes entre grupos etários.

As tábuas de vida levam a análise de sobrevivência a um nível mais estruturado. Uma tábua acompanha uma coorte hipotética submetida a um conjunto de taxas de mortalidade. A coluna l_x registra quantos sobreviventes alcançam a idade exata x ; d_x mostra as mortes entre x e $x + n$; L_x aproxima os anos-pessoa vividos no intervalo; T_x soma os anos a serem vividos a partir de x ; e $e_x = T_x/l_x$ fornece a esperança de vida remanescente (Preston; Heuveline; Guillot, 2001).

Uma aproximação comum para converter m_x em probabilidade de morte é

$$q_x = \frac{nm_x}{1 + (n - a_x)m_x}$$

Na construção de uma tábua de vida, a conversão entre taxa de mortalidade e probabilidade de morte depende da largura do intervalo etário e de uma hipótese sobre o tempo médio vivido por quem morre dentro dele. Essa transformação conecta medidas de período às funções de sobrevivência de uma coorte hipotética e permite obter, de forma recursiva, sobreviventes, mortes, anos-pessoa e esperança de vida.

O encadeamento entre as funções da tábua de vida oferece mais informação do que a observação isolada da esperança de vida, pois alterações na mortalidade infantil, adulta ou idosa podem produzir ganhos médios semelhantes por mecanismos distintos e com implicações sociais diferentes. A estrutura da tábua permite localizar a contribuição de cada idade para a sobrevivência acumulada da população.

A tabela a seguir sintetiza a estrutura de uma tábua de vida e explicita a relação entre sobreviventes, mortes e anos-pessoa, organizando as funções demográficas em uma sequência coerente e preservando a distinção entre taxas observadas e medidas derivadas da coorte hipotética.

Idade x	l_x	q_x	$d_x = l_x q_x$	L_x aproximado
0	100.000	0,020	2.000	99.000
1	98.000	0,004	392	390.432
5	97.608	0,006	586	486.575
10	97.022	0,008	776	483.170

O encadeamento da tábua ajuda a compreender por que os ganhos de sobrevivência nas idades jovens tiveram papel central na transição demográfica: à medida que a mortalidade infantil e na infância diminui, mais indivíduos alcançam as idades reprodutivas e adultas. Em fases posteriores, a redução da mortalidade adulta e idosa aumenta a duração média da vida e eleva a participação relativa dos idosos, com efeitos sobre saúde, previdência, poupança, composição da força de trabalho e demanda por cuidados de longa duração.

A fecundidade apresenta problema análogo ao da mortalidade: taxas brutas misturam intensidade do evento e estrutura. A taxa bruta de natalidade é

$$TBN = \frac{B}{P_m} \times 1.000$$

A taxa bruta de natalidade enfrenta limitação semelhante à da mortalidade, pois seu valor depende simultaneamente do comportamento reprodutivo e da proporção de mulheres em idades fecundas. Populações com estruturas etárias diferentes podem exibir taxas brutas distintas mesmo quando as taxas específicas de fecundidade são próximas, razão pela qual a análise substantiva precisa deslocar-se para as medidas por idade.

Se B_x é o número de nascimentos de mulheres no grupo etário x e F_x o número de mulheres nesse grupo,

$$f_x = \frac{B_x}{F_x}$$

A taxa de fecundidade total, em grupos quinquenais, pode ser aproximada por

$$TFT = 5 \sum_x f_x$$

A taxa de fecundidade total sintetiza o padrão de fecundidade de um período ao somar as taxas específicas por idade, ajustadas pela amplitude dos grupos etários, e pode ser interpretada como o número médio de filhos que uma coorte hipotética teria se experimentasse ao longo da vida reprodutiva as taxas observadas naquele período. Trata-se, portanto, de uma medida sintética de período, e não de uma contagem retrospectiva da fecundidade completa de uma geração real.

A leitura da taxa de fecundidade total exige ainda considerar os efeitos de calendário, pois adiamentos de nascimentos, mudanças na idade média à maternidade e recuperações posteriores podem alterar as taxas de período sem produzir a mesma variação na fecundidade

completa das coortes. O indicador deve, por isso, ser interpretado como síntese do padrão vigente em conjunto com a distribuição etária dos nascimentos.

A mortalidade infantil, por sua importância social, merece indicador próprio. A taxa usual é

$$TMI = \frac{D_{\leq 1}}{B} \times 1.000$$

Ao utilizar os nascidos vivos como denominador, a taxa de mortalidade infantil procura aproximar o risco de morte antes de completar um ano entre integrantes de uma coorte de nascimento. O indicador responde às condições de saúde materno-infantil, saneamento, renda e acesso a serviços e ocupa, por essa razão, posição central na análise das desigualdades sociais, embora sua comparabilidade dependa da qualidade do registro de nascimentos e óbitos infantis.

Fecundidade e mortalidade se conectam ao envelhecimento por uma aritmética cumulativa na qual a queda da fecundidade reduz o tamanho das coortes que entram na base da pirâmide, enquanto a melhora da sobrevivência mantém as coortes adultas por mais tempo no estoque. O resultado é a elevação gradual da idade média e da participação relativa dos idosos, mas esse ajuste não ocorre instantaneamente: mesmo após a redução da fecundidade, uma estrutura inicialmente jovem pode sustentar muitos nascimentos durante algum tempo porque ainda concentra grande número de mulheres em idade reprodutiva. Essa inércia é conhecida como momentum demográfico.

O momentum demográfico explica por que uma taxa agregada de crescimento não pode ser extrapolada indefinidamente, já que a população futura depende do tamanho atual de cada coorte. Duas regiões com o mesmo crescimento corrente podem seguir trajetórias distintas quando uma concentra jovens e a outra já apresenta uma base etária estreita, diferença que conduz diretamente ao método das componentes por coorte desenvolvido no capítulo seguinte.

Durante as fases em que a população em idade ativa cresce mais rapidamente que os grupos dependentes, pode surgir um bônus demográfico, mas sua conversão em crescimento econômico depende de condições como educação, emprego, produtividade e instituições. À medida que o peso relativo dos idosos aumenta, o desafio se desloca para a sustentação da produtividade, da participação laboral e das políticas de envelhecimento ativo; a demografia define as condições estruturais, enquanto a resposta econômica depende da forma como essas condições são aproveitadas.

2.1 Sobrevivência, padronização indireta e bônus demográfico

A curva de sobrevivência complementa a tabela de vida ao expressar a proporção da coorte hipotética que permanece viva em cada idade. A razão entre valores da função de sobreviventes em duas idades fornece uma probabilidade condicional de sobrevivência e

permite distinguir a experiência desde o nascimento da sobrevivência de indivíduos que já alcançaram determinada idade.

A diferença entre sobrevivência desde o nascimento e sobrevivência condicional a idades já alcançadas ganha relevância especial em análises previdenciárias e de saúde, porque os riscos enfrentados nas idades adultas não são os mesmos que determinam a esperança de vida ao nascer. Para questões relacionadas à duração esperada da aposentadoria, à demanda por cuidado e à permanência potencial no mercado de trabalho, a sobrevivência a partir de idades adultas oferece informação mais diretamente relacionada ao problema em estudo.

Quando taxas específicas da população em estudo são instáveis por pequeno número de eventos, a padronização indireta pode ser preferível. Aplica-se um conjunto padrão de taxas às exposições locais para obter óbitos esperados. A razão de mortalidade padronizada é

$$RMP = \frac{D_{obs}}{D_{esp}} \times 100$$

Na padronização indireta, aplicam-se taxas específicas de uma população de referência às exposições da população estudada para obter o número esperado de eventos. A razão entre eventos observados e esperados sintetiza o desvio em relação ao padrão. O procedimento é especialmente útil quando as taxas específicas locais são instáveis, como ocorre em populações pequenas ou em eventos raros.

A razão de mortalidade padronizada depende do conjunto de taxas utilizado como referência. Comparações entre estudos só são substantivamente equivalentes quando a população padrão e os critérios de construção dos grupos etários são compatíveis. A transparência sobre essas escolhas é parte da própria validade do indicador.

O envelhecimento populacional também pode ser acompanhado pela idade mediana, que, diferentemente da média, divide a população em duas metades e é menos sensível às caudas da distribuição. Se a idade mediana passa de 25 para 35 anos em duas décadas, isso não significa que cada pessoa tenha simplesmente "envelhecido dez anos" em termos demográficos, mas que a composição relativa das coortes se deslocou para idades mais elevadas.

À medida que a fecundidade diminui, a participação relativa das crianças tende a cair antes que o peso dos idosos aumente de forma mais intensa, produzindo em determinadas fases da transição uma redução temporária da razão de dependência. É dessa transformação estrutural que decorre a discussão do bônus demográfico: a parcela potencialmente ativa da população pode se ampliar, mas seus efeitos econômicos dependem de emprego, capital humano, produtividade, instituições e capacidade de absorção do mercado de trabalho, e não de um mecanismo automático de crescimento.

Quando a transição avança e o peso relativo dos idosos cresce, a produtividade torna-se ainda mais importante para sustentar a renda por habitante. A resposta econômica pode combinar maior participação feminina e de trabalhadores mais velhos, mudanças nas regras de aposentadoria, acumulação de capital e ganhos de produtividade; a demografia impõe uma restrição dinâmica, mas as instituições e as políticas econômicas condicionam a forma de enfrentá-la.

As medidas desenvolvidas neste capítulo mostram que a interpretação dos eventos vitais exige explicitar denominadores e estrutura etária. Taxas específicas, procedimentos de padronização, tábuas de vida e medidas sintéticas de fecundidade revelam dimensões que permanecem ocultas nas taxas brutas; em conjunto, fecundidade e sobrevivência redefinem a composição populacional e estabelecem as condições iniciais para as projeções por componentes discutidas a seguir.

CAPÍTULO 3 — DA FOTOGRAFIA AO FUTURO: PROJEÇÕES, COORTES E CENÁRIOS

Decisões de longo prazo em educação, previdência, saúde e planejamento urbano não podem ser apoiadas apenas em uma fotografia da população, porque dependem da trajetória futura das coortes e da forma como sobrevivência, fecundidade e migração se combinam ao longo do tempo. O método das componentes trata esses processos separadamente e preserva a estrutura etária como elemento central da dinâmica populacional.

A intuição é simples: quem tem 20 a 24 anos hoje e sobrevive estará no grupo 25 a 29 no próximo passo quinquenal. Se $P_{x,t}$ é a população de idade x no instante t , $S_{x,t}$ a razão de sobrevivência e $M_{x,t}$ o saldo migratório, então

$$P_{x+n,t+n} = P_{x,t}S_{x,t} + M_{x,t}$$

A passagem de uma coorte para o grupo etário seguinte combina sobrevivência e saldo migratório, permitindo identificar se a variação observada decorre predominantemente da mortalidade ou de movimentos populacionais — informação que desaparece quando a projeção considera apenas o total. Em contextos subnacionais, a migração pode alterar de modo substancial o tamanho das coortes adultas e, conseqüentemente, a oferta de trabalho e o número futuro de nascimentos.

Ao preservar a origem demográfica de cada mudança, a projeção por coortes trata sobrevivência, migração e fecundidade como componentes distintos de um mesmo processo: a sobrevivência desloca indivíduos ao longo das idades, a migração acrescenta ou retira pessoas em grupos específicos e a fecundidade forma as novas coortes. A trajetória agregada emerge da combinação desses mecanismos, e não da extrapolação de uma única taxa de crescimento.

Os nascimentos futuros exigem combinar mulheres em idade reprodutiva e taxas específicas de fecundidade. Para grupos quinquenais,

$$B_t \approx 5 \sum_x f_{x,t} \bar{F}_{x,t}$$

A projeção dos nascimentos combina a exposição das mulheres em idade reprodutiva com as taxas específicas de fecundidade correspondentes, de modo que a soma dos nascimentos esperados por grupo etário forme a nova coorte, posteriormente distribuída por sexo e ajustada pela sobrevivência inicial. Como cada coorte projetada permanece no sistema e influencia as etapas seguintes, alterações persistentes na fecundidade produzem efeitos cumulativos ao longo do horizonte de projeção.

A natureza recursiva do método torna pequenas mudanças persistentes nas taxas de fecundidade potencialmente relevantes em horizontes longos, sobretudo quando se combinam

com alterações de sobrevivência e migração. Por essa razão, a interpretação das projeções deve concentrar-se nas hipóteses atribuídas a cada componente, e não apenas no valor total alcançado em determinado ano.

Uma forma compacta de visualizar a mecânica é a matriz de Leslie. Em um modelo com três grupos etários, pode-se escrever

$$\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{L}\mathbf{P}_t$$

com

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Na matriz de Leslie, a primeira linha reúne os coeficientes de fecundidade e as subdiagonais descrevem a passagem das coortes segundo as probabilidades de sobrevivência, enquanto multiplicações sucessivas pelo vetor populacional reproduzem a dinâmica discreta e permitem estudar o crescimento e a distribuição etária de longo prazo.

A representação matricial deve ser interpretada como uma forma compacta de organizar as hipóteses incorporadas aos coeficientes — entre elas, estabilidade das taxas, tratamento da migração e definição dos grupos etários — e não como um procedimento algébrico autossuficiente.

Nas projeções subnacionais, a migração costuma concentrar a maior parcela de incerteza porque, ao contrário da fecundidade e da mortalidade, pode responder rapidamente a emprego, preços de imóveis, infraestrutura, choques climáticos e abertura de novas fronteiras produtivas. Projeções estaduais exigem, por isso, hipóteses explícitas para esse componente, distinguindo, sempre que os dados permitirem, movimentos internos e internacionais e examinando sua seletividade por idade e sexo. Em populações pequenas, oscilações de poucos milhares de pessoas podem modificar perceptivelmente a estrutura etária, sobretudo quando os fluxos se concentram em adultos jovens; a calibração das hipóteses migratórias precisa, portanto, dialogar com evidências sobre mercado de trabalho, expansão urbana e integração regional.

Como nenhuma projeção elimina a incerteza sobre o comportamento futuro da fecundidade, da mortalidade e da migração, a construção de cenários torna explícitas hipóteses alternativas e permite avaliar a sensibilidade dos resultados. Uma trajetória central reúne pressupostos considerados mais plausíveis, enquanto cenários alternativos modificam os componentes dentro de faixas justificáveis, revelando quais decisões permanecem robustas quando a trajetória demográfica se afasta do cenário de referência.

As Projeções da População do IBGE seguem a lógica das componentes demográficas e incorporam estrutura etária, fecundidade, mortalidade e migração, distinguindo-se de extrapolações de tendência agregada (IBGE, 2024; 2025a).

A extrapolação de uma taxa agregada pode ser incompatível com a estrutura etária, pois uma população pode continuar crescendo por inércia depois da queda da fecundidade e desacelerar à medida que coortes menores passam a dominar a base da pirâmide. O método por componentes representa essa transição de forma explícita: enquanto a taxa agregada resume o passado recente, a projeção condiciona o futuro ao tamanho das coortes e às hipóteses de fecundidade, sobrevivência e migração.

A incerteza de longo prazo pode ser representada por simulações dos parâmetros de fecundidade, sobrevivência e migração, cuja distribuição gera bandas de projeção e evidencia a dependência dos resultados em relação às hipóteses adotadas. Essas bandas tendem a se ampliar com o horizonte porque pequenas diferenças nos componentes se acumulam e interagem ao longo das sucessivas coortes. A decomposição da incerteza também é informativa: no curto prazo, a estrutura etária inicial restringe fortemente as possibilidades; em horizontes mais longos, fecundidade e migração respondem por parcela crescente da dispersão entre cenários. O uso da projeção deve acompanhar essa diferença, já que o planejamento escolar de curto prazo depende sobretudo de coortes já nascidas, enquanto previdência e infraestrutura de longo prazo exigem maior atenção às hipóteses sobre sobrevivência, migração e comportamento reprodutivo (Preston; Heuveline; Guillot, 2001).

Do ponto de vista econômico, projeções por coorte permitem antecipar alterações na oferta potencial de trabalho. Se o grupo 15–64 se estabiliza e o grupo 65+ cresce, a manutenção do produto per capita passa a depender mais de produtividade, participação laboral e capital por trabalhador. A identidade apresentada no primeiro capítulo retorna:

$$\frac{Y}{P} = \frac{Y}{L} \frac{L}{P}$$

Se L/P tende a cair por envelhecimento, um país pode compensar parte do efeito elevando Y/L ou ampliando participação laboral de grupos subutilizados. Essa passagem mostra por que projeção demográfica não é um exercício separado da economia: ela altera os denominadores e as restrições sob as quais políticas econômicas serão avaliadas.

Migração e crescimento estadual respondem também a oportunidades relativas em outras unidades, pois fronteiras produtivas, metrópoles e corredores econômicos ultrapassam limites administrativos e conectam mercados de trabalho e decisões de localização. Essa interdependência importa na própria construção dos cenários: uma expansão econômica concentrada em determinado eixo pode alterar simultaneamente os saldos migratórios de estados de origem e destino, com efeitos encadeados sobre oferta de trabalho, fecundidade futura e demanda por serviços. Projeções subnacionais, portanto, não são independentes entre si quando os fluxos populacionais ligam as unidades, e a compatibilização entre cenários

estaduais e trajetória nacional exige que ganhos migratórios internos de uma unidade correspondam a perdas em outras, salvo a parcela atribuída à migração internacional. Esse vínculo contábil prepara a passagem da análise demográfica para uma representação espacial explícita da interdependência regional.

3.1 Erro de projeção, cenários e consistência contábil

A avaliação ex post de projeções deve considerar simultaneamente o sinal, a magnitude e a composição do erro, porque métricas agregadas podem resumir o desempenho e, ainda assim, ocultar compensações importantes entre coortes. Quando as projeções orientam políticas dirigidas a grupos etários específicos, a validação por idade e sexo torna-se indispensável.

$$EP = \frac{P_t - \hat{P}_t}{P_t} \times 100$$

Mesmo quando reproduz adequadamente o total populacional, uma projeção pode superestimar jovens e subestimar idosos, razão pela qual a precisão agregada não substitui o diagnóstico por coorte.

Como superestimações e subestimações em grupos diferentes podem se anular no total, a avaliação dos erros deve preservar a desagregação etária, sobretudo porque as políticas públicas operam sobre públicos específicos e respondem a necessidades distintas ao longo do ciclo de vida.

A consistência entre componentes também merece verificação. Em uma projeção anual simplificada,

$$P_{t+1} - P_t = B_t - D_t + SM_t$$

A consistência contábil entre estoques e componentes deve ser examinada antes da modelagem, pois diferenças residuais podem refletir ajustes de cobertura, mudanças territoriais ou incompatibilidades na base, e não necessariamente dinâmica demográfica efetiva.

A origem da incerteza projetiva torna-se mais clara quando os cenários alteram separadamente migração, sobrevivência e fecundidade, permitindo identificar por que a estrutura futura se modifica e em quais componentes se concentra a maior parcela da sensibilidade dos resultados.

A análise de sensibilidade pode ser aproximada por derivadas. Se a população projetada P_T depende de uma taxa de fecundidade f , uma sensibilidade local é

$$S_f = \frac{\partial P_T}{\partial f}$$

A sensibilidade local pode ser estimada por diferenças finitas, comparando projeções obtidas após pequenas perturbações em um parâmetro, procedimento que ajuda a identificar quais componentes exercem maior influência em cada horizonte.

$$S_f \approx \frac{P_T(f + \Delta f) - P_T(f)}{\Delta f}$$

Como descreve a resposta interna do modelo a alterações nos parâmetros, a sensibilidade não deve ser interpretada como efeito causal; sua utilidade está em localizar fontes de incerteza e verificar a robustez das trajetórias projetadas.

Nas projeções subnacionais, a migração tende a concentrar parte importante da incerteza de curto e médio prazo e, ao mesmo tempo, conecta diretamente o cenário demográfico à trajetória econômica regional.

Ao transportar coortes por sobrevivência, fecundidade e migração, a projeção demográfica prolonga no tempo a contabilidade populacional e explicita o quanto cada trajetória depende das hipóteses adotadas. Com essa base estabelecida, o capítulo seguinte desloca a análise para a descrição estatística das diferenças econômicas entre os estados.

CAPÍTULO 4 — ESTATÍSTICA APLICADA À LEITURA ECONÔMICA DOS ESTADOS BRASILEIROS

Embora reúna apenas 27 observações, uma base formada pelas unidades da Federação contém heterogeneidade substantiva expressiva em escala, estrutura produtiva, densidade e crescimento. A comparação sistemática dessas diferenças exige medidas de posição, dispersão e associação: a estatística descritiva organiza a heterogeneidade, a regressão linear condiciona relações entre variáveis e a análise de resíduos oferece o primeiro diagnóstico sobre a adequação da hipótese de independência espacial.

A média aritmética de uma variável x é

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

A média resume a posição central da distribuição, mas sua capacidade de representar o conjunto depende da assimetria e da presença de observações extremas. Em variáveis econômicas estaduais, valores muito elevados podem deslocar a média em relação à maior parte das unidades, razão pela qual medidas de localização devem ser examinadas em conjunto com dispersão, quantis e representação gráfica.

O resultado de 50 mil não descreve nenhuma unidade específica e é puxado para cima pelo valor de 100 mil. Por isso, uma média deve ser lida junto com uma medida de dispersão. A variância amostral é

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Variância e desvio-padrão quantificam a dispersão em torno da média e mostram por que, à medida que cresce a heterogeneidade entre as unidades, uma única medida de posição central se torna menos representativa. O problema ganha importância em amostras estaduais, nas quais diferenças institucionais e produtivas podem produzir caudas longas e observações com elevada influência.

Como preserva a unidade original da variável, o desvio-padrão oferece interpretação mais direta do que a variância; quando o interesse recai sobre a comparação da dispersão relativa entre variáveis medidas em escalas distintas, o coeficiente de variação pode ser utilizado, desde que a média seja positiva e suficientemente afastada de zero.

O coeficiente de variação remove a unidade de medida:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \times 100$$

Ao expressar a dispersão como proporção da média, o coeficiente de variação facilita comparações entre indicadores medidos em unidades diferentes, mas perde estabilidade

interpretativa quando a média se aproxima de zero ou quando a escala admite valores negativos de maneira substantiva.

Na base empírica, o PIB per capita estadual de 2023 apresenta forte assimetria e ampla distância entre os extremos. O Distrito Federal ocupa posição excepcional, enquanto São Paulo, Mato Grosso, Rio de Janeiro, Santa Catarina e Mato Grosso do Sul também se situam em patamares elevados. Diversos estados nordestinos concentram-se na parte inferior da distribuição. A Figura 4.1 evidencia essa heterogeneidade e antecipa a necessidade de examinar influência e estrutura espacial.

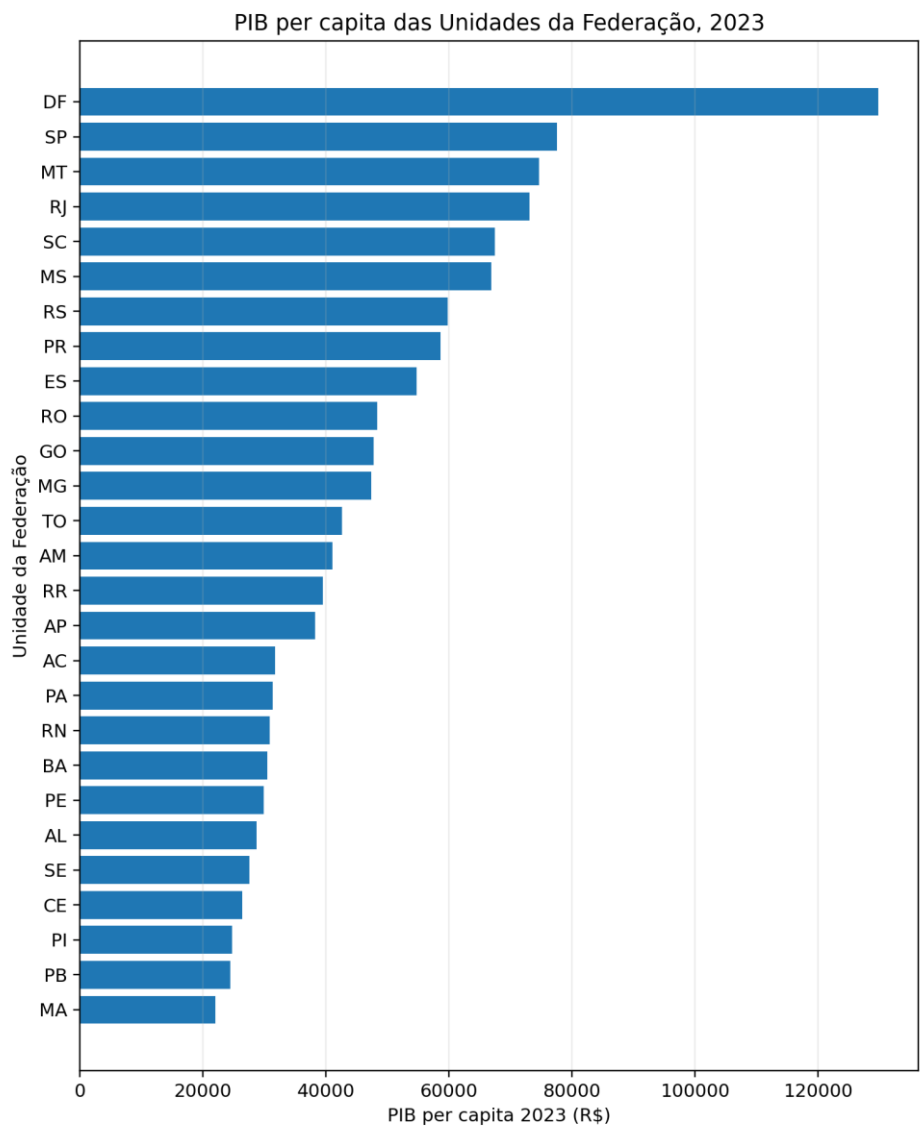


Figura 4.1 — PIB per capita das unidades da Federação, 2023. Fonte: elaboração do autor com a base da aplicação.

A agregação por grandes regiões reforça a percepção de heterogeneidade, mas exige cuidado conceitual, porque a Tabela 4.1 apresenta a soma da população e médias simples estaduais para PIB per capita, crescimento e densidade. Como cada unidade recebe o mesmo

peso, essas estatísticas não equivalem ao PIB regional per capita nem a médias ponderadas pela população; trata-se de um resumo exploratório da distribuição estadual, e não de um agregado econômico oficial.

	Região	Populaç ão na base	PIB pc médio simples (R\$)	Crescimen to médio (%)	Densida de média
e te	Centro -Oeste	16.289.538	79.754,20	15,07	130,38
	Norte	17.354.884	38.946,50	13,54	4,89
	Nordes	54.658.515	27.210,14	3,64	61,78
	Sul	29.937.706	61.940,09	11,05	58,51
	Sudest	84.840.113	63.168,21	5,48	166,03

Tabela 4.1 — Síntese regional da base. Fonte: elaboração do autor.

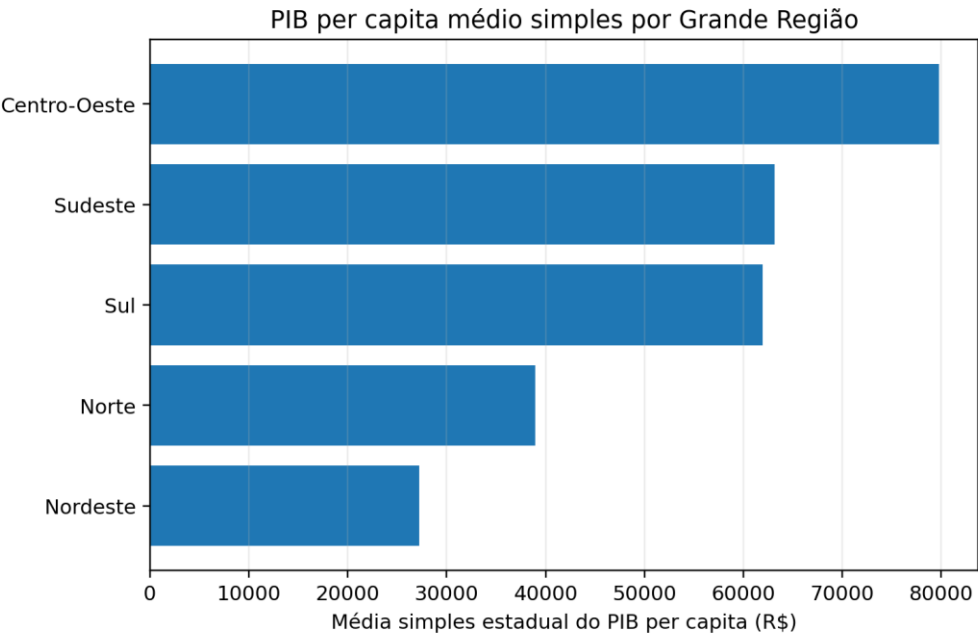


Figura 4.2 — PIB per capita médio simples das unidades por Grande Região. Fonte: elaboração do autor.

A comparação regional sugere diferenças substantivas, mas não diz se duas variáveis se movem juntas. Para isso, a covariância amostral entre x e y é

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y})$$

O sinal informa a direção média da co-movimentação. Para padronizar a magnitude, usa-se a correlação de Pearson,

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

Como o coeficiente de correlação permanece entre -1 e 1, sua magnitude oferece uma escala padronizada para a intensidade do co-movimento, sem identificar o mecanismo que o produz. Uma correlação positiva entre crescimento populacional e PIB per capita pode refletir atração migratória por mercados de trabalho mais dinâmicos, expansão simultânea provocada por um terceiro fator, composição setorial ou vários mecanismos combinados; a direção causal, portanto, não pode ser inferida da correlação isoladamente.

A regressão linear permite condicionar a associação a outras variáveis. Em sua forma mais simples,

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

O estimador de mínimos quadrados para a inclinação, quando há intercepto, pode ser escrito com dados desviados:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

seguido de

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

O estimador de mínimos quadrados pode ser interpretado como solução que escolhe os coeficientes capazes de minimizar a soma dos quadrados dos resíduos. Na regressão com intercepto, a inclinação relaciona a covariação entre explicativa e dependente à variação interna da explicativa. Essa estrutura evidencia por que um coeficiente elevado pode decorrer tanto de forte co-movimento quanto de baixa dispersão em X, e prepara a passagem para a formulação matricial do modelo múltiplo.

A interpretação substantiva de um coeficiente de regressão exige considerar a escala das variáveis, o conjunto de covariáveis e as hipóteses de exogeneidade. O MQO descreve uma associação condicional, mas não identifica por si só o sentido causal nem elimina vieses produzidos por simultaneidade, erro de mensuração ou variáveis omitidas.

Em notação matricial, a regressão múltipla é

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$$

e o estimador é

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

Essa forma é mais do que uma abreviação. Ela permite incluir várias covariáveis, derivar propriedades do estimador e conectar a regressão convencional aos modelos espaciais. A matriz X guarda, por linhas, as observações; por colunas, intercepto e explicativas. A multiplicação $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ resume produtos e quadrados necessários ao ajuste conjunto.

A notação matricial torna explícita a geometria do MQO e permite generalizar a regressão para múltiplas covariáveis. A matriz X reúne as características observadas das unidades, enquanto o vetor de parâmetros é obtido pela projeção de y no espaço gerado pelas colunas de X . Essa formulação será retomada nos modelos espaciais, nos quais a matriz de pesos W modifica a estrutura do sistema e introduz dependência entre as observações.

Na aplicação estadual, utiliza-se o logaritmo do PIB per capita e o logaritmo da densidade. A transformação reduz a assimetria de variáveis positivas e permite interpretar coeficientes log-log como elasticidades aproximadas. A escolha, entretanto, deve ser guiada pela relação substantiva e pelo comportamento dos resíduos, e não pela busca automática de melhor ajuste.

$$\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln x_i + u_i$$

uma variação de 1% em x está associada aproximadamente a $\beta_1\%$ em y , ceteris paribus.

Quando a explicativa permanece em nível e a dependente está em log, como no caso da taxa de crescimento expressa em proporção,

$$\ln y_i = \beta_0 + \beta_2 g_i + u_i$$

a interpretação de uma alteração Δg é aproximadamente $100\beta_2\Delta g$ por cento. A forma exata é $100[\exp(\beta_2\Delta g) - 1]$. Essa distinção será importante na leitura dos impactos do SDM.

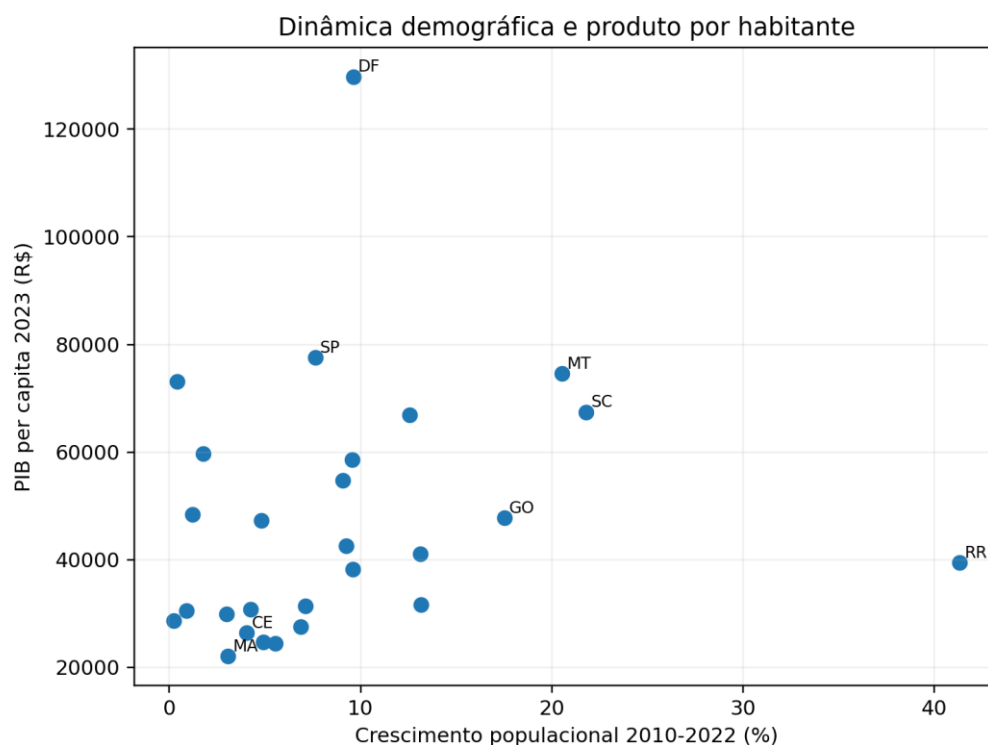


Figura 4.3 — Crescimento populacional 2010–2022 e PIB per capita 2023 nas unidades da Federação.
Fonte: elaboração do autor.

A figura 4.3 sugere que alto crescimento populacional pode coexistir com níveis variados de produto por habitante. Roraima, por exemplo, combina crescimento acumulado elevado com PIB per capita intermediário; Mato Grosso e Santa Catarina aparecem com crescimento alto e PIB per capita superior; o Distrito Federal tem produto por habitante excepcional e crescimento menos extremo. A nuvem de pontos reforça a necessidade de regressão, mas também deixa uma pergunta: unidades próximas no mapa formam padrões semelhantes? Se a resposta for sim, a hipótese de independência entre observações estará ameaçada.

Em uma regressão convencional, costuma-se supor que, condicionalmente às covariáveis, os erros não carreguem dependência sistemática. Porém, estados vizinhos podem compartilhar infraestrutura, choques climáticos, cadeias de produção ou fluxos migratórios. Se esses processos forem omitidos, os resíduos podem se organizar espacialmente. A estatística descritiva e o MQO nos trouxeram até a fronteira do problema; o próximo capítulo transforma vizinhança em matriz e mede diretamente a autocorrelação espacial.

4.1 Incerteza amostral, resíduos e heterocedasticidade

Uma estimativa de regressão não é apenas um número; ela vem acompanhada de incerteza. Sob condições clássicas, a variância de $\hat{\beta}$ é

$$Var(\hat{\beta} | X) = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

Como σ^2 é desconhecida, usa-se a variância residual estimada

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-k}$$

onde k é o número de parâmetros. A raiz dos elementos diagonais de $\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$ fornece erros-padrão. Um intervalo de confiança aproximado de 95% é

$$\hat{\beta}_j \pm t_{0,975;n-k}SE(\hat{\beta}_j)$$

Intervalos de confiança expressam a incerteza associada ao parâmetro estimado e devem acompanhar a interpretação do valor pontual. Uma faixa ampla indica que diferentes magnitudes permanecem compatíveis com a informação amostral, mesmo quando o sinal estimado é estável. Em amostras pequenas, essa incerteza ganha importância e recomenda cautela diante de conclusões baseadas exclusivamente em limiares convencionais de significância.

A inferência deve combinar magnitude, erro-padrão, intervalo de confiança e coerência com a especificação, porque valores de p resumem apenas uma dimensão do teste e não substituem a avaliação da relevância econômica nem da sensibilidade do resultado a observações influentes ou formas funcionais alternativas.

A análise de resíduos é igualmente importante. O resíduo $\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$ representa a parte não explicada pelo modelo. Gráficos de resíduos contra valores ajustados podem revelar variância crescente, não linearidade ou observações influentes. Se $Var(u_i|X) = \sigma_i^2$ varia entre unidades, há heterocedasticidade. MQO continua estimando a reta sob exogeneidade, mas os erros-padrão clássicos deixam de ser adequados; erros robustos podem ser necessários.

No contexto estadual, heterocedasticidade é plausível porque unidades têm escalas, estruturas e qualidade de mensuração diferentes. Estados pequenos podem apresentar volatilidade maior em alguns indicadores; unidades com economias concentradas em setores específicos podem reagir fortemente a preços de commodities. Assim, um único parâmetro de variância pode ser uma aproximação simplificadora.

Transformações logarítmicas ajudam a reduzir assimetrias, mas não são um remédio universal. A diferença entre regressão em nível e log deve seguir a pergunta substantiva. Em $y = \beta_0 + \beta_1 x$, β_1 mede unidades de y por unidade de x . Em $\ln y = \beta_0 + \beta_1 x$, mede semi-elasticidade. Em $\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$, mede elasticidade. Confundir essas formas produz interpretações percentuais incorretas mesmo quando a estimação numérica foi executada perfeitamente.

A visualização complementa a inferência ao tornar visíveis assimetrias, não linearidades e observações influentes. Boxplots, diagramas de dispersão e mapas devem ser utilizados como

instrumentos de diagnóstico. Quando resíduos de mesmo sinal se concentram em regiões contíguas, a evidência gráfica precisa ser formalizada por estatísticas espaciais, evitando que padrões territoriais sejam tratados apenas como impressão visual.

O capítulo mostra que resumir dados exige preservar o significado do denominador e da unidade de análise: médias simples regionais não substituem agregados ponderados, correlação não equivale a causalidade e a regressão linear não corrige automaticamente dependência espacial. Ainda assim, o MQO oferece uma referência indispensável, pois sua comparação com modelos espaciais permitirá identificar com precisão o que muda quando o território passa a integrar a especificação.

CAPÍTULO 5 — QUANDO A VIZINHANÇA ENTRA NA ANÁLISE: DEPENDÊNCIA E AUTOCORRELAÇÃO ESPACIAL

Antes de integrar a vizinhança a um modelo estatístico, é necessário convertê-la em uma regra formal, já que fronteiras compartilhadas, distância geográfica, fluxos migratórios e conexões de transporte representam canais distintos de interação. A matriz de pesos espaciais W codifica essa estrutura e, por isso, não é um detalhe puramente técnico: ela incorpora uma hipótese substantiva sobre quais unidades estão potencialmente conectadas e com que intensidade (Anselin, 1988; Almeida, 2012).

Em uma matriz binária de contiguidade, define-se

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ e } j \text{ são vizinhos,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A diagonal é normalmente zero, porque uma unidade não é tratada como sua própria vizinha. Se quatro regiões A, B, C e D formam uma cadeia A–B–C–D, uma matriz binária possível é

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como B e C têm dois vizinhos e A e D apenas um, costuma-se padronizar cada linha pela soma. O resultado é

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A padronização por linha transforma os pesos de cada unidade em proporções cuja soma é igual a um. Nessa convenção, o produto Wy pode ser interpretado como média ponderada dos valores observados no conjunto de vizinhos definidos por W . A operação não possui conteúdo temporal; a expressão defasagem espacial descreve a dependência entre unidades conectadas no espaço.

A defasagem espacial resume o ambiente de vizinhança de cada observação e depende simultaneamente dos valores analisados e da matriz W ; por isso, alterações na regra de conexão podem modificar a referência espacial mesmo quando o vetor de dados permanece inalterado. A escolha da matriz deve ser tratada como parte da especificação econômica e submetida a exercícios de robustez, e não apenas como uma etapa cartográfica.

A leitura de Wy como média das unidades vizinhas é particularmente conveniente quando W é padronizada por linha, mas outras normalizações podem ser apropriadas em

aplicações específicas. A convenção adotada precisa ser explicitada porque afeta a escala dos parâmetros espaciais e condiciona a comparação entre modelos.

Definir a matriz W significa explicitar uma hipótese substantiva sobre o canal pelo qual as unidades territoriais podem interagir. A contiguidade pressupõe que fronteiras compartilhadas constituem o elo relevante; a distância inversa admite interação decrescente com a separação geográfica; matrizes de vizinhos mais próximos controlam o número de conexões; e pesos construídos a partir de fluxos aproximam relações econômicas observadas. Como não existe uma matriz universalmente correta, sua adequação deve ser julgada à luz do mecanismo que se pretende representar (LeSage; Pace, 2009).

Na aplicação empírica, a opção por uma matriz de contiguidade estadual padronizada por linha procura conciliar transparência operacional e aderência à hipótese de interação entre unidades que compartilham fronteira. A Figura 5.1 representa esquematicamente essa rede e evidencia que a etapa decisiva não consiste apenas em desenhar vizinhos, mas em converter relações territoriais em uma matriz operacional capaz de integrar estatísticas e modelos econométricos.

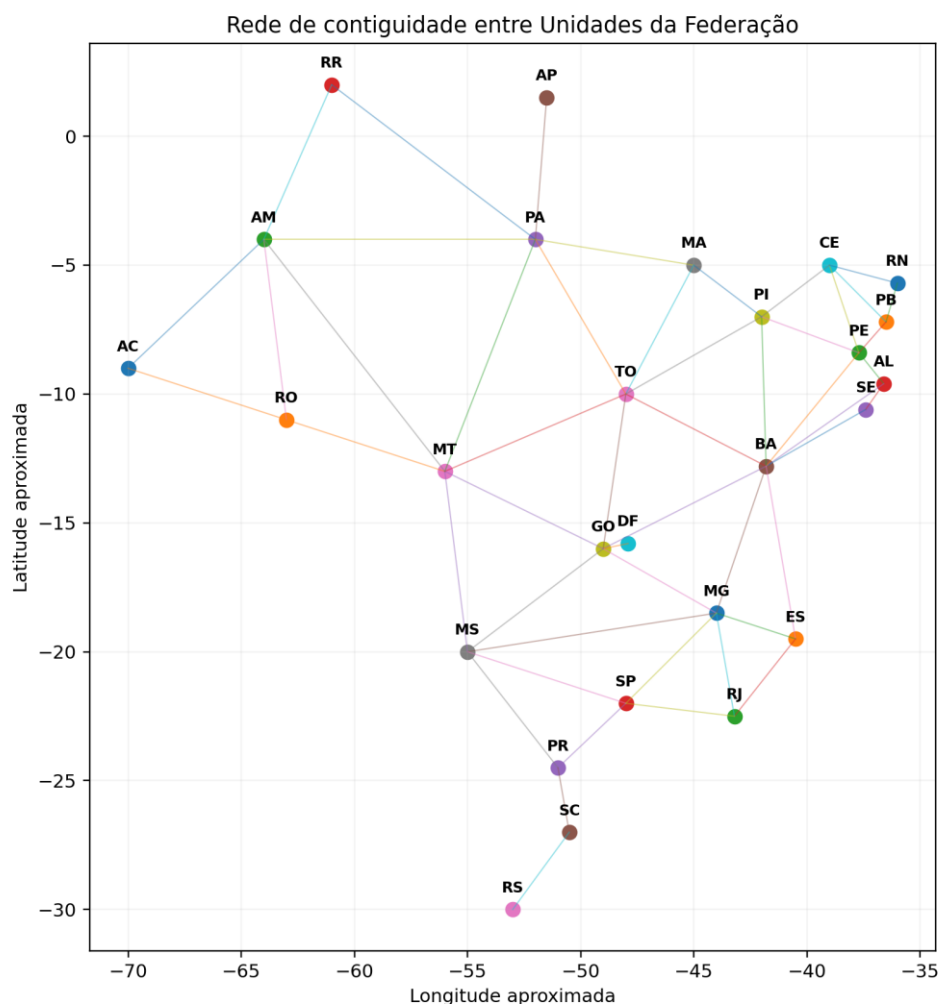


Figura 5.1 — Representação esquemática de uma rede de vizinhança espacial. Fonte: elaboração do autor.

Depois de definir W , a primeira pergunta é descritiva: existe autocorrelação espacial global? Moran (1950) propôs um índice que compara o produto cruzado entre valores centrados de regiões vizinhas com a variância total. Se $z_i = y_i - \bar{y}$, o índice é

$$I = \frac{n}{S_0} \frac{\sum_i \sum_j w_{ij} z_i z_j}{\sum_i z_i^2}$$

onde $S_0 = \sum_i \sum_j w_{ij}$. Em uma matriz padronizada por linha sem ilhas, $S_0 = n$, simplificando o fator inicial para um.

O índice global de Moran pode ser interpretado como uma medida de co-movimento espacial entre a variável centrada e sua defasagem. O numerador pondera produtos cruzados entre unidades conectadas, enquanto o denominador normaliza o resultado pela variabilidade total. Valores acima da esperança sob aleatoriedade sugerem associação positiva, isto é, proximidade entre valores semelhantes; valores abaixo indicam maior contraste entre vizinhos.

A magnitude do Moran não deve ser equiparada diretamente a uma correlação de Pearson. Sua distribuição depende da matriz de pesos, da estrutura da amostra e da hipótese de

referência. A inferência, portanto, deve considerar a configuração espacial específica e ser acompanhada por testes analíticos ou de permutação.

Sob uma hipótese de aleatoriedade, a esperança do Moran global é aproximadamente

$$E(I) = -\frac{1}{n-1}$$

Sob aleatoriedade, a esperança do Moran global é ligeiramente negativa em amostras finitas. A significância pode ser avaliada por aproximações analíticas ou por permutação, que redistribui repetidamente os valores entre as unidades mantendo W fixa. Essa estratégia produz uma distribuição empírica da estatística sob a hipótese de ausência de associação entre valores e localização.

Na aplicação do logaritmo do PIB per capita estadual, o Moran global é aproximadamente **0,553**. Com 9.999 permutações, a proporção de estatísticas tão extremas quanto a observada é 0,0001 no procedimento empregado. Isso não prova um mecanismo causal, mas rejeita fortemente a ideia de que o padrão espacial observado seja compatível com uma distribuição aleatória simples dos valores entre os estados.

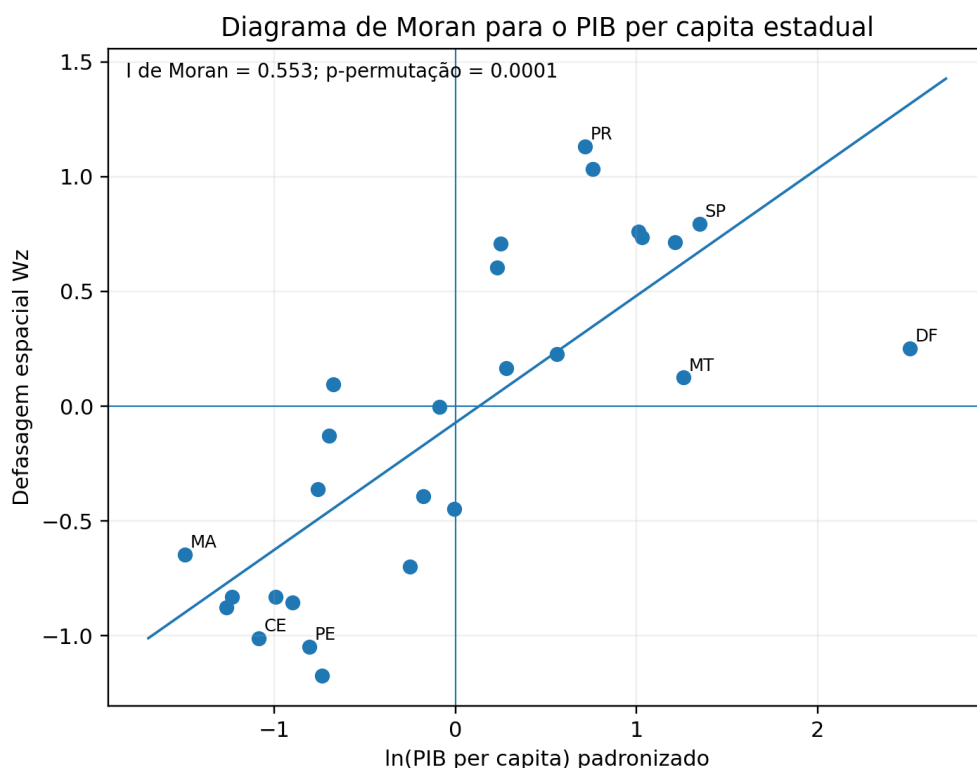


Figura 5.2 — Diagrama de Moran do logaritmo do PIB per capita estadual. Fonte: elaboração do autor; 9.999 permutações.

O diagrama de Moran coloca no eixo horizontal a variável padronizada e no vertical sua defasagem espacial. O quadrante alto-alto contém unidades acima da média cercadas por vizinhos também relativamente altos; baixo-baixo reúne unidades abaixo da média próximas

de vizinhos baixos. Os quadrantes alto-baixo e baixo-alto representam contrastes locais. O gráfico ajuda a ler a geografia por trás do índice global.

O Moran global resume o mapa inteiro, mas pode ocultar configurações locais. Anselin (1995) propôs os indicadores locais de associação espacial, ou LISA. Uma forma do Moran local é

$$I_i = z_i \sum_j w_{ij} z_j$$

com ajustes de escala dependendo da convenção. O valor de I_i indica quanto a observação i contribui para o padrão de associação. Com testes por permutação local, podem-se identificar clusters alto-alto, baixo-baixo e outliers espaciais.

O diagnóstico ganha importância quando a autocorrelação persiste nos resíduos de uma regressão. Moran residual positivo indica que a especificação convencional deixou estrutura territorial sistemática sem representação. Dependendo do mecanismo gerador, essa omissão pode comprometer a eficiência dos estimadores, a inferência e, sobretudo, a interpretação econômica dos coeficientes. A evidência cartográfica deve, portanto, ser tratada como hipótese estatística e não como mero recurso ilustrativo.

A matriz W também introduz um novo tipo de multiplicador. Se o resultado de uma unidade depende de Wy , uma mudança local pode circular pela rede. Um estado afeta vizinhos, que retroagem sobre o primeiro e atingem outros. Essa ideia será formalizada no modelo SAR. Se, por outro lado, choques não observados se correlacionam entre vizinhos, o modelo SEM é mais natural. Se características observadas dos vizinhos importam diretamente, surge o SDM. A autocorrelação espacial, portanto, não é um método final; ela diagnostica e prepara a estrutura econométrica.

5.1 Rainha, torre, distância e vizinhos mais próximos

Em dados municipais ou polígonos regulares, duas definições de contiguidade são comuns. A contiguidade “torre” considera vizinhas áreas que compartilham uma borda de comprimento positivo. A contiguidade “rainha” também aceita o contato por vértice. Para estados, a diferença costuma ser menos dramática do que em grades ou municípios, mas o princípio permanece: a regra de vizinhança altera os elementos de W e, portanto, toda a cadeia de resultados.

Matrizes de distância inversa atribuem maior peso a unidades próximas:

$$w_{ij} = \frac{1}{d_{ij}^\alpha}, \quad i \neq j$$

Pesos de distância inversa atribuem maior influência a unidades próximas e reduzem progressivamente a contribuição das mais distantes. O parâmetro de decaimento controla a rapidez com que essa influência diminui. Após eventual padronização por linha, a interpretação passa a depender das proporções relativas dos pesos atribuídos ao conjunto de vizinhos.

A regra de k vizinhos mais próximos resolve o problema de unidades sem vizinhos e controla o número de conexões. Cada unidade se conecta às k mais próximas. Com $k = 4$, todas têm ao menos quatro ligações de saída, embora a relação possa ser assimétrica antes de eventual simetrização. Isso é útil em pontos dispersos ou quando contiguidade física não representa bem interação econômica.

A escolha de W também afeta o valor esperado e a variância de estatísticas espaciais. Por isso, comparar Moran calculado sob matrizes diferentes não é apenas repetir o mesmo teste; é testar hipóteses distintas sobre o processo de interação. Uma boa prática é apresentar a matriz principal e justificar duas ou três alternativas em robustez.

Nos testes por permutação, o valor de p é calculado pela posição da estatística observada na distribuição obtida após redistribuições aleatórias dos dados. A correção de Monte Carlo que acrescenta uma unidade ao numerador e ao denominador evita probabilidades exatamente iguais a zero em amostras finitas e fornece uma resolução inferencial determinada pelo número de permutações.

Aumentar o número de permutações refina a resolução do teste, mas não corrige problemas de especificação da matriz de pesos ou de múltiplas comparações. A inferência por permutação deve ser interpretada em conjunto com a hipótese substantiva de vizinhança e com a estabilidade dos resultados sob alternativas plausíveis de W .

Como os indicadores LISA envolvem múltiplos testes locais, sua interpretação exige atenção à possibilidade de significâncias ocasionais e à estabilidade dos padrões identificados. Em um conjunto de 27 testes, procedimentos de correção, permutações e confronto com a teoria reduzem o risco de transformar variações fortuitas em clusters substantivos. O mapa LISA é mais informativo quando confirma uma estrutura econômica plausível e robusta do que quando é empregado como detector automático de regiões prioritárias.

Dependência espacial e heterogeneidade espacial descrevem problemas diferentes e precisam ser distinguidas: a primeira indica que valores ou erros em uma unidade se relacionam aos de outras, enquanto a segunda significa que a própria relação entre variáveis pode mudar ao longo do território. Um único coeficiente global pode ser inadequado quando a inclinação varia sistematicamente entre regiões, mesmo que não exista autocorrelação residual forte.

A matriz de pesos estabelece a ponte entre geografia e econometria: o Moran global avalia a presença de associação espacial, os indicadores locais identificam onde ela se concentra

e o diagnóstico dos resíduos mostra se a regressão convencional deixou dependência sem modelar. A partir desse ponto, a questão econométrica deixa de ser apenas a existência do padrão e passa a ser o mecanismo pelo qual a interdependência deve entrar na equação.

CAPÍTULO 6 — ECONOMETRIA ESPACIAL POR DENTRO: MQO, SAR, SEM E SDM

SAR, SEM e SDM representam mecanismos distintos de interdependência e não devem ser tratados como simples variações intercambiáveis de uma mesma regressão. A escolha entre eles depende da hipótese substantiva sobre o canal de transmissão — interação entre resultados, correlação de choques não observados ou influência de características observadas das unidades vizinhas —, e a formalização a seguir mostra como cada mecanismo altera a estrutura do modelo e a interpretação dos parâmetros.

O ponto de partida permanece o modelo linear clássico,

$$y = X\beta + u, \quad E(u|X) = 0$$

Sob as condições usuais, o estimador de mínimos quadrados é

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

Ele serve como referência porque ignora interação espacial explícita. Se, depois de controlar densidade e crescimento, os resíduos continuam correlacionados no espaço, há uma pista de que u não está se comportando como ruído independente. Se o resultado de um estado reage ao resultado dos vizinhos, o problema está ainda mais diretamente na equação de y .

6.1 O modelo SAR e o efeito de retroalimentação

O modelo autorregressivo espacial, ou SAR, escreve

$$y = \rho Wy + X\beta + \varepsilon$$

em que ρ mede a intensidade da dependência espacial endógena. O termo Wy contém os resultados das unidades vizinhas. Reorganizando,

$$(I - \rho W)y = X\beta + \varepsilon$$

logo

$$y = (I - \rho W)^{-1}X\beta + (I - \rho W)^{-1}\varepsilon$$

A matriz

$$S(\rho) = (I - \rho W)^{-1}$$

é o multiplicador espacial. Se $|\rho|$ estiver em região que garante convergência, pode-se usar a expansão de Neumann:

$$(I - \rho W)^{-1} = I + \rho W + \rho^2 W^2 + \rho^3 W^3 + \dots$$

A expansão do multiplicador espacial permite interpretar o SAR como um processo de realimentação no qual o efeito inicial de uma alteração local alcança as unidades conectadas por W , retorna por caminhos de ordem superior e continua a se propagar enquanto a condição de estabilidade for satisfeita. A intensidade e a distribuição dessas respostas dependem conjuntamente de ρ e da topologia da rede.

Como o multiplicador $(I - \rho W)^{-1}$ distribui os efeitos pela rede, o coeficiente de uma covariável no SAR não pode ser interpretado como efeito marginal isolado. Mesmo quando a alteração ocorre em uma única unidade, a resposta final combina efeitos locais, transmissões aos vizinhos e retornos sucessivos, característica central à interpretação econômica de modelos com defasagem espacial da variável dependente.

A interpretação econômica dos coeficientes estruturais do SAR exige, portanto, convertê-los em medidas de impacto derivadas do multiplicador espacial, distinguindo o efeito médio que permanece na unidade de origem, os efeitos transmitidos às demais unidades e o efeito total sobre o sistema (LeSage; Pace, 2009).

6.2 O modelo SEM e os choques espacialmente correlacionados

No modelo de erro espacial,

$$\begin{aligned} y &= X\beta + u \\ u &= \lambda Wu + \varepsilon \end{aligned}$$

Reorganizando o erro,

$$u = (I - \lambda W)^{-1} \varepsilon$$

Aqui, y não depende diretamente de Wy . A dependência está nos choques não observados. Imagine produtividade afetada por uma infraestrutura regional omitida, por condições ambientais compartilhadas ou por uma cadeia produtiva que atravessa fronteiras. Se esses fatores não estão em X , erros de estados vizinhos podem mover-se juntos. O parâmetro λ capta essa correlação estruturada.

No SEM, a dependência espacial opera no componente não observado e, por isso, altera o significado econômico do parâmetro estimado. O multiplicador $(I - \lambda W)^{-1}$ transforma inovações idiossincráticas em erros espacialmente correlacionados, de modo que choques omitidos em uma unidade podem repercutir sobre unidades conectadas; λ descreve dependência na estrutura do erro, e não retroalimentação direta da variável dependente.

Distinguir SAR e SEM significa separar duas explicações substantivamente diferentes para um mesmo padrão espacial aparente: interação econômica entre resultados ou presença de fatores regionais omitidos que se movem de forma correlacionada. Como essas hipóteses ocupam partes distintas da equação, a escolha entre os modelos deve combinar teoria e diagnóstico da especificação, em vez de se apoiar exclusivamente em medidas de ajuste.

6.3 O SDM e as características dos vizinhos

O modelo de Durbin espacial combina defasagem do dependente e defasagens das covariáveis:

$$y = \rho W y + X\beta + WX\theta + \varepsilon$$

O termo $WX\theta$ permite que características dos vizinhos influenciem o resultado local. Essa estrutura é particularmente útil quando a pergunta econômica envolve spillovers observáveis. Crescimento populacional em estados contíguos pode alterar demanda, mobilidade, competição por trabalho e integração de mercados; densidade vizinha pode refletir proximidade de aglomerações econômicas.

Reorganizando,

$$y = (I - \rho W)^{-1}(X\beta + WX\theta + \varepsilon)$$

Para a k -ésima variável, a matriz de derivadas é

$$\frac{\partial y}{\partial x_k'} = (I - \rho W)^{-1}(\beta_k I + \theta_k W)$$

Essa matriz tem $n \times n$ elementos. A diagonal contém impactos sobre a própria unidade, enquanto os elementos fora da diagonal representam transmissões entre unidades. LeSage e Pace (2009) propõem resumi-la por efeitos direto, indireto e total.

O efeito direto médio é a média da diagonal:

$$DE_k = \frac{1}{n} \text{tr}[(I - \rho W)^{-1}(\beta_k I + \theta_k W)]$$

O efeito total médio é a média das somas das linhas:

$$TE_k = \frac{1}{n} \mathbf{1}'(I - \rho W)^{-1}(\beta_k I + \theta_k W)\mathbf{1}$$

e o indireto é

$$IE_k = TE_k - DE_k$$

No SDM, a matriz de derivadas combina o multiplicador espacial com os coeficientes próprios e defasados das covariáveis, fazendo com que o efeito direto médio não precise coincidir com o coeficiente beta e permitindo que o efeito indireto seja relevante mesmo quando a defasagem de uma covariável parece pequena isoladamente. A decomposição em impactos diretos, indiretos e totais é, portanto, a forma apropriada de traduzir parâmetros estruturais em magnitudes economicamente interpretáveis.

A retroalimentação espacial faz com que os impactos finais possam superar, atenuar ou até contrariar a leitura imediata dos coeficientes, pois sinais e magnitudes resultam da combinação entre beta, theta, rho e W. Reportar apenas os coeficientes brutos do SDM pode, assim, ocultar a parcela do efeito associada aos caminhos de transmissão entre unidades.

6.4 Por que a estimação usa máxima verossimilhança

No SAR, Wy é simultaneamente determinado com y , de modo que MQO aplicado diretamente produz endogeneidade. Uma abordagem clássica é a máxima verossimilhança. Sob normalidade dos erros,

$$\ell(\beta, \rho, \sigma^2) = \ln|I - \rho W| - \frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} [(I - \rho W)y - X\beta]'[(I - \rho W)y - X\beta]$$

O termo $\ln|I - \rho W|$ é o logaritmo do determinante jacobiano da transformação. Ele é o componente que distingue a verossimilhança espacial de uma regressão normal simples. O algoritmo escolhe os parâmetros que maximizam ℓ dentro do domínio admissível de ρ .

O determinante $|I - \rho W|$ integra a verossimilhança porque a transformação espacial altera conjuntamente o volume do espaço amostral. Como seu logaritmo varia com ρ e com o espectro de W , essa parcela influencia diretamente a função objetivo durante a estimação e constitui um dos elementos que distinguem a máxima verossimilhança espacial da regressão normal convencional.

O domínio admissível do parâmetro espacial é determinado pelos autovalores de W , e a restrição correspondente garante a não singularidade do sistema e impede que o multiplicador produza respostas explosivas. A estimação deve respeitar esse domínio e explicitar a normalização adotada para a matriz de pesos, pois ambas as escolhas condicionam a interpretação do parâmetro espacial.

No SEM, a verossimilhança inclui analogamente $\ln|I - \lambda W|$ e aplica $(I - \lambda W)$ ao vetor de resíduos $y - X\beta$. O SDM usa a mesma estrutura do SAR, mas com matriz de regressores ampliada por WX . Em amostras pequenas, como 27 UFs, a quantidade de parâmetros precisa ser controlada; modelos com muitos regressores e defasagens podem consumir graus de liberdade rapidamente.

6.5 Critérios de comparação e diagnóstico

O critério de informação de Akaike é

$$AIC = 2k - 2\ell_{\max}$$

em que k é o número de parâmetros contados sob uma convenção consistente e $\ell_{\max}$ a log-verossimilhança maximizada. Menor AIC indica melhor compromisso relativo entre ajuste e complexidade para modelos comparáveis. A palavra “relativo” é essencial: AIC não mede verdade substantiva nem transforma associação em causalidade.

Ao penalizar a log-verossimilhança pelo número de parâmetros, o AIC compara ajuste e parcimônia e somente favorece uma especificação mais complexa quando o ganho de ajuste é suficiente para compensar a penalização adicional. O critério deve ser aplicado a modelos estimados sobre a mesma amostra e com definições consistentes da função de verossimilhança.

Mesmo quando o AIC favorece determinada especificação, a escolha do modelo precisa permanecer vinculada ao diagnóstico residual e à plausibilidade do mecanismo econômico, porque um ganho de ajuste relativo pode refletir apenas maior flexibilidade paramétrica sem produzir interpretação substantiva superior.

A comparação entre especificações deve ser acompanhada pelo diagnóstico espacial dos resíduos ou das inovações, pois a permanência de Moran residual elevado indica que o modelo ainda deixa estrutura geográfica sem explicar. Na aplicação, o MQO apresenta autocorrelação residual positiva, enquanto SAR, SEM e SDM reduzem substancialmente essa dependência, evidência que ajuda a separar melhora efetiva na representação espacial de mero acréscimo de parâmetros.

A seleção entre modelos espaciais deve combinar fundamento teórico, diagnóstico dos resíduos, parcimônia e estabilidade. Interação entre resultados é compatível com SAR, correlação de choques omitidos remete ao SEM e influência de características vizinhas justifica o SDM; testes de restrição e critérios de informação ajudam a confrontar essas hipóteses, mas não substituem a formulação do mecanismo econômico.

6.6 Relações entre modelos e testes de restrição

Os modelos espaciais também podem ser vistos como membros de uma família. O SDM reduz-se ao SAR quando $\theta = 0$. Sob certas restrições, ele pode reproduzir implicações semelhantes às do SEM. Essa propriedade faz do SDM uma especificação relativamente geral e explica por que alguns autores recomendam iniciar por ele quando há justificativa teórica para defasagens de covariáveis e depois testar restrições (Elhorst, 2014).

Considere

$$y = \rho W y + X\beta + WX\theta + \varepsilon$$

A hipótese $H_0: \theta = 0$ pode ser testada por razão de verossimilhança comparando SDM e SAR. Se ℓ_U é a log-verossimilhança do modelo irrestrito e ℓ_R a do restrito,

$$LR = 2(\ell_U - \ell_R)$$

Na aplicação empírica, a razão de verossimilhança entre SDM e SAR mostra perda relevante de ajuste quando as defasagens das covariáveis são retiradas conjuntamente. Como a amostra reúne apenas 27 unidades, essa evidência deve ser interpretada ao lado da magnitude dos parâmetros, dos diagnósticos residuais e dos exercícios de robustez, evitando uma leitura exclusivamente assintótica do teste.

A evidência obtida justifica manter as defasagens das covariáveis na especificação central, mas não transforma o SDM na única representação admissível do processo. Matrizes alternativas, observações influentes e possíveis relações endógenas podem modificar tanto a estatística do teste quanto a interpretação substantiva das defasagens espaciais.

Outra possibilidade é usar testes multiplicadores de Lagrange a partir do MQO para diagnosticar defasagem do dependente ou erro espacial. A lógica é verificar se a derivada da log-verossimilhança em direção ao parâmetro espacial é suficientemente diferente de zero sob

o modelo restrito. Esses testes são úteis, mas a seleção automática “teste aponta SAR, logo use SAR” pode falhar quando há misspecificação em X ou quando mecanismos coexistem.

A estabilidade do multiplicador também depende do espectro de W . Para matriz padronizada por linha, o maior autovalor em módulo costuma ser 1, e uma condição suficiente usual para a inversa é manter ρ no intervalo compatível com os autovalores. À medida que ρ se aproxima do limite, $(I - \rho W)^{-1}$ pode amplificar fortemente choques. Isso explica por que valores espaciais altos requerem atenção: não são apenas números próximos de um; eles alteram a força das rodadas de realimentação.

A expansão em série do multiplicador mostra que a resposta espacial resulta de sucessivas rodadas de transmissão, cuja contribuição depende da potência de ρ e dos caminhos representados em W^k . Mesmo quando os termos de ordem elevada se tornam progressivamente menores, sua soma pode representar parcela relevante do impacto agregado em redes fortemente conectadas.

Essa perspectiva também esclarece por que efeitos indiretos podem superar diretos em determinados casos. Uma covariável pode ter impacto local moderado, mas percorrer muitas ligações e produzir soma agregada considerável fora da unidade de origem. O inverso também é possível quando θ e ρ têm sinais que se compensam. Portanto, reportar apenas β em SAR/SDM pode esconder a parte economicamente mais interessante do resultado.

As diferenças entre MQO, SAR, SEM e SDM tornam-se decisivas na aplicação empírica porque cada especificação atribui a dependência espacial a um mecanismo distinto. O MQO não representa transmissão territorial explícita, o SAR incorpora retroalimentação do resultado, o SEM localiza a dependência nos choques e o SDM permite que resultados e características dos vizinhos integrem o sistema; a comparação entre modelos deve, portanto, considerar ajuste, autocorrelação residual, coerência dos mecanismos e estabilidade dos impactos.

6.7 Interpretação substantiva e limites da inferência espacial

A formalização espacial amplia a capacidade de representar interdependências geográficas, mas não elimina a distinção entre dependência e causalidade. Em unidades territoriais agregadas, a proximidade entre estados pode sintetizar integração de mercados de trabalho, infraestrutura compartilhada, encadeamentos produtivos, migração, difusão tecnológica ou continuidades históricas e institucionais. O parâmetro espacial resume a intensidade da interdependência condicionada à especificação adotada, sem identificar sozinho qual mecanismo gerou o padrão observado; essa limitação é especialmente importante na análise demográfica, em que decisões individuais de mobilidade, fecundidade e inserção ocupacional aparecem agregadas quando a unidade de análise é a Unidade da Federação.

A interpretação econômica precisa ser construída em conjunto com a escolha de W , o conjunto de covariáveis e a escala geográfica da investigação. Anselin (1988) mostra que a matriz de pesos formaliza uma hipótese sobre quem pode interagir com quem, enquanto LeSage e Pace (2009) enfatizam que, em modelos com retroalimentação, a interpretação substantiva exige acompanhar a propagação dos efeitos pelo multiplicador espacial. Um parâmetro espacial estatisticamente diferente de zero não constitui evidência genérica de um "efeito de vizinhança"; a conclusão admissível é mais específica: dadas a amostra, as variáveis de controle e a estrutura de conectividade adotada, os resultados são compatíveis com interdependência entre as unidades.

O mesmo cuidado deve orientar a comparação entre SAR, SEM e SDM, cujo propósito não é maximizar o número de coeficientes significativos, mas identificar qual representação é mais coerente com a questão substantiva e deixa menos estrutura sistemática nos resíduos. Elhorst (2014) observa que especificações mais gerais podem ser úteis para testar restrições desde que a interpretação permaneça vinculada ao mecanismo que lhes deu origem. Na aplicação aos estados brasileiros, os modelos espaciais organizam evidências sobre concentração econômica, dinâmica populacional e spillovers territoriais; eles quantificam associações e padrões de transmissão condicionais, enquanto afirmações causais exigiriam hipóteses adicionais de identificação, informação temporal mais rica ou desenhos quase experimentais capazes de separar os efeitos espaciais de fontes concorrentes de endogeneidade.

CAPÍTULO 7 — UMA APLICAÇÃO AOS ESTADOS BRASILEIROS: DEMOGRAFIA, VIZINHANÇA E PRODUTO POR HABITANTE

A aplicação empírica examina se a distribuição estadual do produto por habitante mantém estrutura espacial depois de controladas a densidade e a variação populacional. A interpretação é deliberadamente associativa, porque diferenças de renda podem atrair população, variáveis omitidas podem afetar simultaneamente crescimento e produto e os períodos dos indicadores não estabelecem sequência causal suficiente; a econometria espacial é empregada para comparar representações alternativas da interdependência territorial e verificar como cada uma modifica a leitura dos coeficientes.

A aplicação utiliza uma base que reúne as 27 unidades da Federação e organiza, em uma mesma estrutura, os indicadores econômicos e demográficos empregados nas estimações. A variável dependente é $\ln(PIBpc)$, construído a partir do PIB per capita de 2023. As explicativas são $\ln(densidade)$ e crescimento populacional acumulado entre 2010 e 2022, convertido para proporção nos modelos. A matriz W é de contiguidade estadual e padronizada por linha. A especificação básica é

$$\ln(PIBpc_i) = \beta_0 + \beta_1 \ln(dens_i) + \beta_2 g_i + u_i$$

A Tabela 7.1 apresenta a base operacional das estimações e torna visível a amplitude dos indicadores entre as 27 unidades da Federação. A leitura dos valores deve ser feita em conjunto com as fontes oficiais e com as definições temporais descritas nas referências, porque diferenças de ano-base e unidade de medida condicionam o alcance das comparações.

UF	Reg.	PIB pc	Pop.	Cresc.	Densid.
		2023 (R\$)		2010–2022 (%)	
AC	N	31.675,60	830.018	13,15	5,06
AL	NE	28.675,84	3.127.683	0,23	112,38
AP	N	38.187,09	733.759	9,59	5,15
AM	N	41.047,91	3.941.613	13,14	2,53
BA	NE	30.476,54	14.141.626	0,89	25,03
CE	NE	26.405,96	8.794.957	4,05	59,05
DF	CO	129.790,44	2.817.381	9,62	489,01
ES	SE	54.732,78	3.833.712	9,07	83,20
GO	CO	47.721,56	7.056.495	17,53	20,74
MA	NE	22.020,63	6.776.699	3,07	20,55
MT	CO	74.620,05	3.658.649	20,54	4,05
MS	CO	66.884,75	2.757.013	12,58	7,72
MG	SE	47.321,23	20.539.989	4,81	35,02
PA	N	31.347,59	8.120.131	7,11	6,51
PB	NE	24.395,17	3.974.687	5,53	70,39
PR	S	58.624,33	11.444.380	9,57	57,42
PE	NE	29.857,27	9.058.931	2,98	92,37
PI	NE	24.736,15	3.271.199	4,90	12,99
RJ	SE	73.052,55	16.055.174	0,41	366,96
RN	NE	30.804,91	3.302.729	4,25	62,53
RS	S	59.736,20	10.882.965	1,77	38,62

UF	Reg.	PIB pc 2023 (R\$)	Pop.	Cresc. 2010–2022 (%)	Densid.
RO	N	48.353,38	1.581.196	1,20	6,65
RR	N	39.460,54	636.707	41,34	2,85
SC	S	67.459,74	7.610.361	21,80	79,49
SP	SE	77.566,27	44.411.238	7,63	178,96
SE	NE	27.518,80	2.210.004	6,87	100,72
TO	N	42.553,36	1.511.460	9,25	5,45

Tabela 7.1 — Base estadual utilizada na aplicação. Fonte: elaboração do autor a partir das fontes indicadas nas referências.

A heterogeneidade interestadual se manifesta não apenas na amplitude de cada indicador, mas também nas combinações muito distintas entre densidade, crescimento demográfico e produto por habitante. O Distrito Federal reúne renda e densidade muito superiores às da maior parte das unidades, Mato Grosso apresenta produto elevado em contexto de baixa densidade, São Paulo combina alta densidade e alto PIB per capita, Maranhão ocupa a extremidade inferior da distribuição de renda e Roraima registra o maior crescimento populacional acumulado sem posição equivalente no ranking econômico. Esses contrastes antecipam a insuficiência de qualquer explicação unidimensional para o desempenho estadual.

7.1 O modelo de referência: MQO

No MQO, a estimativa para $\ln(\text{densidade})$ é 0,1304, com erro-padrão 0,0595 e $p \approx 0,038$. Como a variável dependente e a densidade estão em logaritmo, a leitura aproximada é: uma densidade 1% maior está associada a PIB per capita 0,13% maior, mantido o crescimento constante. O coeficiente de crescimento é 2,2139 quando g está em proporção; um aumento de um ponto percentual, $\Delta g = 0,01$, corresponde aproximadamente a $2,2139 \times 0,01 = 0,02214$ em log, ou cerca de 2,24% na transformação exata.

A associação positiva estimada pelo MQO é compatível tanto com mecanismos de aglomeração quanto com migração dirigida a mercados de trabalho mais dinâmicos, mas o diagnóstico residual impede que essa leitura seja encerrada na regressão convencional. O Moran dos resíduos, próximo de 0,440, indica que unidades vizinhas mantêm erros de mesmo sinal com frequência superior à esperada sob independência espacial, mostrando que a especificação deixa parte sistemática da geografia sem representação.

7.2 SAR: o desempenho dos vizinhos entra na equação

O SAR estimado é

$$\ln(\text{PIBpc}) = \rho W \ln(\text{PIBpc}) + X\beta + \varepsilon$$

A estimativa de ρ é 0,7211, com erro-padrão 0,1265. O valor é elevado e estatisticamente distinto de zero no ajuste utilizado. O coeficiente de $\ln(\text{densidade})$ cai para

0,1001 e permanece significativo; crescimento passa a 1,5215. A principal mudança, entretanto, é estrutural: uma parcela importante da variação estadual está associada à configuração do PIB per capita nas unidades contíguas.

Não se deve dizer que “um aumento de 1% no PIB do vizinho causa 0,72% no estado”, porque ρ não é uma elasticidade marginal simples. O SAR é simultâneo. O efeito final passa por $(I - \rho W)^{-1}$ e se distribui pela rede. A estimativa de ρ informa intensidade da interdependência endógena, enquanto impactos de covariáveis exigem a matriz de derivadas.

7.3 SEM: a geografia pode estar nos choques não observados

No SEM, a estimativa de λ é 0,7701, também elevada. Densidade tem coeficiente 0,1433 e permanece significativa; crescimento cai para 0,6017 e deixa de ser estatisticamente distinto de zero nos níveis usuais. Essa mudança é informativa: quando a dependência é tratada como correlação de choques omitidos, parte da associação antes atribuída ao crescimento desaparece.

Em termos substantivos, o SEM é compatível com a ideia de que estados vizinhos compartilham fatores não observados: infraestrutura interestadual, estruturas produtivas regionais, condições naturais ou instituições correlacionadas. O modelo não identifica qual fator é responsável; apenas modela a correlação espacial do componente não observado.

7.4 SDM: crescimento dos vizinhos e spillovers observáveis

O SDM inclui $W\ln(densidade)$ e Wg além de Wy . A estimativa de ρ é 0,5614. O coeficiente próprio de $\ln(densidade)$ é 0,1667 e o de crescimento 1,6542. A defasagem espacial de densidade é -0,0508 e não é estatisticamente distinta de zero. Já a defasagem espacial de crescimento é 2,9295, com evidência estatística no ajuste.

A presença de uma defasagem positiva do crescimento populacional sugere que a dinâmica demográfica do entorno contém informação adicional sobre o produto por habitante local, mesmo após o controle pela própria dinâmica da unidade e pela dependência espacial do resultado. Essa associação é compatível com integração de mercados de trabalho, corredores de expansão econômica e fluxos interestaduais, mas a especificação não identifica isoladamente qual canal produz o padrão observado.

Ao reunir as estimativas dos quatro modelos, a Tabela 7.2 permite comparar não apenas os níveis convencionais de significância, apresentados como referência, mas sobretudo a magnitude dos parâmetros, sua estabilidade entre especificações e a coerência com os diagnósticos espaciais. Em uma amostra de 27 observações, pequenas alterações de especificação podem modificar erros-padrão e coeficientes, razão pela qual a leitura dos resultados não deve se reduzir a uma classificação dicotômica baseada em valores de p .

Parâmetro	MQO	SAR	SEM	SDM
Constante	10,0298 *** (0,2635)	2,5273* (1,3265)	10,1475 *** (0,3166)	3,8965* * (1,5414)
ln(Densidade)	0,1304* * (0,0595)	0,1001* ** (0,0380)	0,1433* ** (0,0542)	0,1667* ** (0,0506)
Crescimento	2,2139* * (1,0217)	1,5215* * (0,6571)	0,6017 (0,5759)	1,6542* ** (0,6084)
rho	—	0,7211* ** (0,1265)	—	0,5614* ** (0,1571)
lambda	—	—	0,7701* ** (0,1204)	—
W·ln(Densidade)	—	—	—	-0,0508 (0,0745)
W·Crescimento	—	—	—	2,9295* ** (1,1257)
AIC	31,0537	16,7405	17,9903	11,5341
Moran resíduo/inação	0,4399	-0,0522	-0,0068	-0,0788

Tabela 7.2 — Estimativas dos modelos. Erros-padrão entre parênteses. *** p<0,01; ** p<0,05; * p<0,10. Fonte: elaboração do autor.

7.5 Comparação de ajuste e dependência remanescente

A comparação das funções de verossimilhança mostra uma melhora expressiva quando a dependência espacial é incorporada: a log-verossimilhança passa de -12,53 no MQO para -4,37 no SAR e -5,00 no SEM, alcançando 0,23 no SDM. Com uma contagem consistente de parâmetros estruturais, os AICs correspondem a 31,05, 16,74, 17,99 e 11,53, respectivamente. Dentro desse conjunto de especificações, o menor AIC do SDM indica o melhor compromisso relativo entre ajuste e complexidade.

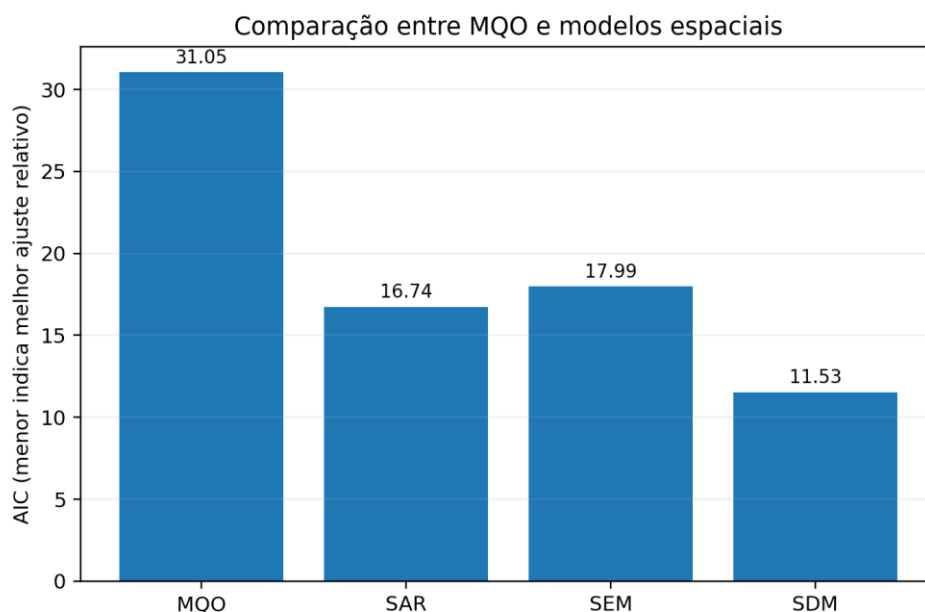


Figura 7.1 — Critério de informação de Akaike nos modelos estimados. Fonte: elaboração do autor.

Mais importante do que o AIC isolado é observar o que acontece com a estrutura espacial restante. O Moran dos resíduos do MQO é 0,440. Nas inovações dos modelos espaciais, os valores ficam próximos de zero: -0,052 no SAR, -0,007 no SEM e -0,079 no SDM. A regressão convencional deixava uma geografia clara sem modelar; as especificações espaciais absorvem grande parte dela.

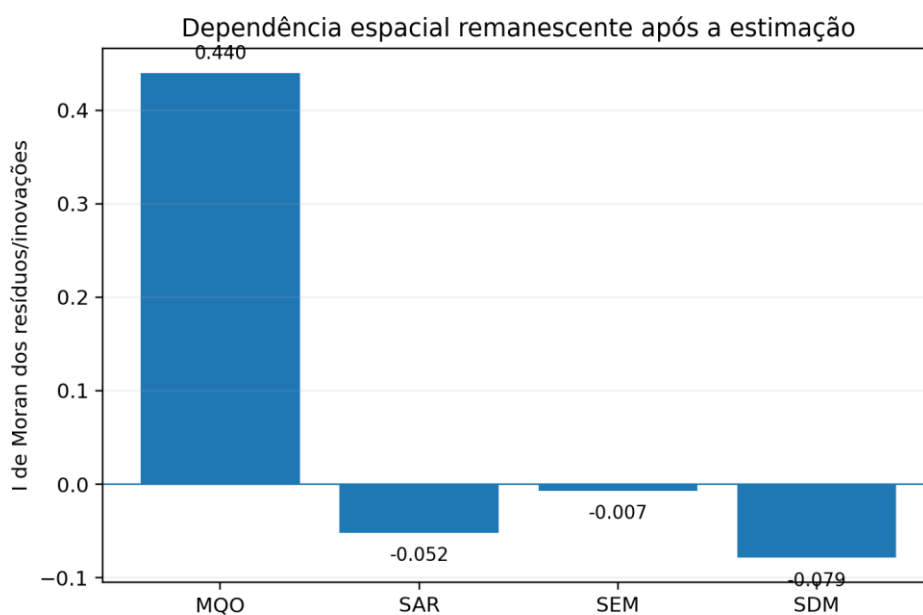


Figura 7.2 — Moran dos resíduos/inovações após a estimação. Fonte: elaboração do autor.

7.6 Decomposição dos impactos do SDM

A interpretação final do SDM exige decompor a matriz

$$S_k = (I - \rho W)^{-1}(\beta_k I + \theta_k W)$$

Para a densidade, o efeito direto médio estimado é 0,1760, o indireto 0,0882 e o total 0,2642. Como densidade e PIB per capita estão em log, um aumento de 1% na densidade está associado, na média do sistema, a aproximadamente 0,176% de efeito direto, 0,088% de efeito indireto agregado sobre outras unidades e 0,264% de efeito total. A palavra “associado” é fundamental: o desenho não identifica causalidade.

Para o crescimento populacional, os impactos foram expressos para uma variação de um ponto percentual. O efeito direto médio é menor do que o componente indireto, e o efeito total sugere associação espacial de magnitude elevada. Esse padrão reforça a importância da vizinhança na especificação, mas também exige cautela diante da possibilidade de simultaneidade, seleção migratória e influência de poucas unidades.

A magnitude dos impactos de crescimento não deve ser convertida em parâmetro causal ou regra de política. Em uma seção transversal pequena, ela deve ser tratada como evidência de associação espacial forte, cuja estabilidade precisa ser examinada sob matrizes alternativas, exclusão de observações influentes e especificações temporais mais ricas.

Variável	Direto	Indireto	Total
ln(Densidade)	0,1760	0,0882	0,2642
Crescimento (1 p.p.)	0,0250	0,0795	0,1045

Tabela 7.3 — Impactos médios derivados do SDM. Fonte: elaboração do autor.

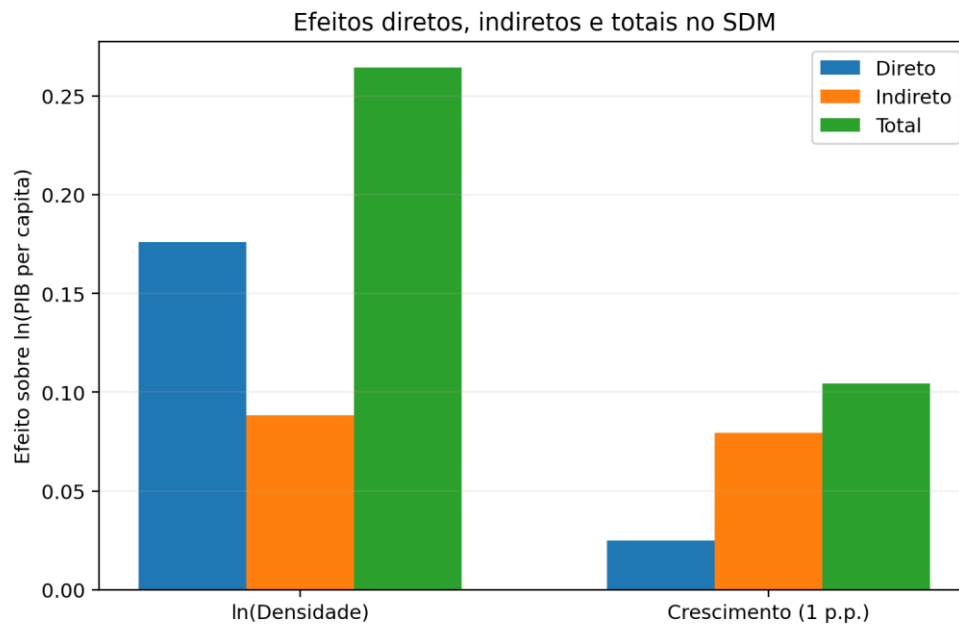


Figura 7.3 — Efeitos diretos, indiretos e totais no SDM. Fonte: elaboração do autor.

7.7 Estados acima e abaixo da referência de seus vizinhos

Uma maneira complementar de narrar a geografia é comparar o PIB per capita de cada unidade à média geométrica de seus vizinhos, medida operacionalmente na base. O “gap” não é um coeficiente econométrico; é um indicador descritivo. Valores positivos mostram uma unidade acima da referência vizinha; negativos, abaixo.

O Distrito Federal apresenta diferença de aproximadamente +172%, um caso extremo que reflete sua estrutura econômica e renda muito superiores ao entorno. Mato Grosso aparece cerca de +65%. São Paulo e Rio de Janeiro também apresentam diferenças positivas relevantes. Em sentido oposto, Maranhão está cerca de 31% abaixo da referência de vizinhança, Acre cerca de 29% e Pará aproximadamente 22% abaixo. Essas diferenças lembram que clusters regionais coexistem com outliers espaciais.

UF	Diferença em relação à referência de vizinhos (%)
MA	-31,3
AC	-28,9
PA	-22,3
GO	-18,3
PR	-16,8
PI	-16,3
TO	21,4
AP	21,8
RJ	24,7

UF	Diferença em relação à referência de vizinhos (%)
SP	27,8
MT	65,3
DF	172,0

Tabela 7.4 — UFs com maiores diferenças negativas e positivas em relação à referência de vizinhança.

Fonte: elaboração do autor.

Uma leitura regional dos resultados precisa preservar a heterogeneidade interna de cada macrorregião, evitando transformar médias ou padrões espaciais em caricaturas territoriais. O Nordeste reúne vários estados de PIB per capita menor, mas Pernambuco e Rio Grande do Norte aparecem acima de referências vizinhas em determinados cálculos; o Norte combina baixas densidades com trajetórias bastante distintas de crescimento e renda; o Centro-Oeste reúne o caso singular do Distrito Federal, estados ligados ao agronegócio e vastas áreas de baixa densidade; e Sul e Sudeste concentram unidades de renda elevada sem eliminar diferenças internas relevantes. A econometria espacial não suprime essa diversidade, mas fornece uma linguagem para descrever como parte dela se organiza em rede.

7.8 Uma leitura regional dos padrões observados

A região Norte combina baixa densidade média estadual e forte heterogeneidade de crescimento. Amazonas e Pará têm grandes extensões territoriais, enquanto Roraima apresenta crescimento acumulado excepcional. O PIB per capita, contudo, não acompanha linearmente o crescimento. Rondônia aparece acima da média regional; Acre e Pará ficam abaixo da referência de seus vizinhos na medida de gap. Essa configuração é compatível com a ideia de que distância, estrutura produtiva e integração de mercados importam tanto quanto a quantidade de pessoas.

No Nordeste, a densidade média é maior que no Norte, mas o PIB per capita médio simples das UFs é menor. Isso já refuta uma interpretação mecânica em que densidade, sozinha, determinaria renda. Maranhão, Piauí, Paraíba e Bahia aparecem com gaps negativos em relação aos vizinhos no indicador utilizado, enquanto Pernambuco e Rio Grande do Norte têm gaps positivos. A presença de clusters de baixa renda pode coexistir com centros regionais relativamente mais fortes, algo que o Moran global resume apenas parcialmente.

O Centro-Oeste é marcado pela influência do Distrito Federal e pela expansão econômica de Mato Grosso. O DF tem renda por habitante e densidade muito altas, gerando um contraste espacial extraordinário com Goiás e outros vizinhos. Mato Grosso, por outro lado, combina baixa densidade, crescimento populacional elevado e alto PIB per capita, um padrão associado à fronteira produtiva e ao agronegócio. Esses dois casos mostram por que uma única narrativa de “aglomeração urbana” é insuficiente para explicar renda estadual.

No Sudeste, a proximidade geográfica reúne quatro economias com perfis bastante distintos, o que ajuda a ilustrar por que a vizinhança não implica homogeneidade. São Paulo combina alta renda, densidade e integração com várias fronteiras estaduais; o Rio de Janeiro apresenta alta densidade e renda, porém baixo crescimento populacional; Minas Gerais ocupa posição intermediária em renda e grande extensão territorial; e o Espírito Santo combina produto por habitante relativamente elevado com menor escala populacional. Em um modelo espacial, essas unidades não são observações isoladas, porque seus mercados e redes de conexão se estendem também ao Centro-Oeste e ao Sul.

No Sul, Santa Catarina chama atenção pelo crescimento acumulado de 21,8% e PIB per capita elevado. Paraná e Rio Grande do Sul também têm renda acima da média nacional estadual, mas ritmos demográficos diferentes. O contraste entre Santa Catarina e Rio Grande do Sul sugere como migração interna e estrutura econômica podem diferenciar estados contíguos mesmo dentro de uma região relativamente integrada.

A coerência substantiva dos resultados pode ser examinada confrontando os coeficientes médios com configurações estaduais concretas. A associação positiva da densidade encontra correspondência em unidades altamente urbanizadas, enquanto o desempenho de Mato Grosso mostra que renda elevada também pode surgir em territórios rarefeitos quando a estrutura produtiva difere; de forma análoga, a relevância do crescimento dos vizinhos pode assumir significados econômicos distintos em corredores integrados e em áreas extensas de baixa conectividade. Os parâmetros médios resumem o sistema, mas não devem ser interpretados como descrição uniforme de cada estado.

A heterogeneidade sugere extensões que exigiriam amostras ou dimensões temporais mais amplas. Interações regionais poderiam permitir inclinações distintas; painéis estaduais possibilitariam controlar heterogeneidade permanente; e unidades geográficas mais desagregadas capturariam aglomerações metropolitanas e polos intermediários. A aplicação atual deve ser entendida como uma representação parcimoniosa da estrutura espacial interestadual, e não como especificação definitiva do desenvolvimento regional brasileiro.

7.9 Interpretação econômica dos efeitos espaciais

A interpretação dos resultados do SDM deve partir da decomposição matricial dos impactos, e não da leitura isolada dos coeficientes estruturais, porque uma alteração em determinada covariável afeta inicialmente a própria unidade e, por meio de W , alcança as unidades conectadas. Essas respostas podem retornar ao ponto de origem e continuar circulando pela rede, fazendo com que o efeito final dependa do multiplicador espacial e da posição relativa de cada unidade no sistema.

A lógica de realimentação faz com que os impactos médios não coincidam necessariamente com os coeficientes brutos: o componente direto incorpora retornos à unidade de origem, o indireto agrega transmissões para outras unidades e o total resume a resposta média do sistema. A interpretação substantiva deve concentrar-se nessas medidas derivadas e preservar a natureza associativa da aplicação.

Para densidade, os impactos estimados são relativamente moderados e distribuídos entre componentes direto e indireto. Para crescimento, a parcela indireta é mais expressiva, indicando que a dinâmica demográfica do entorno ocupa papel importante na representação estatística do produto por habitante. Essa diferença de composição é economicamente mais informativa do que a comparação isolada dos coeficientes estruturais.

A decomposição dos impactos também evidencia os limites da agregação estadual, porque uma mesma alteração média pode corresponder a mecanismos distintos em áreas metropolitanas, fronteiras produtivas ou regiões de baixa densidade. Painéis e escalas territoriais menores são caminhos naturais para verificar se os spillovers observados no nível estadual persistem quando a heterogeneidade espacial é representada com maior detalhe.

7.10 Considerações sobre os resultados

A leitura conjunta dos diagnósticos e das estimativas revela três regularidades centrais sem reduzir a análise a uma enumeração de resultados: o PIB per capita estadual apresenta autocorrelação espacial positiva e o MQO deixa dependência relevante nos resíduos; a densidade mantém associação positiva nas diferentes especificações, embora com magnitudes distintas e sem que isso constitua identificação de economias de aglomeração; e a relação entre crescimento populacional e produto varia conforme a estrutura espacial adotada, enfraquecendo-se no SEM e adquirindo no SDM um componente de vizinhança particularmente relevante.

O SDM apresenta o menor AIC no conjunto estimado e oferece a decomposição mais completa dos spillovers observáveis. Esse resultado o torna a especificação central da aplicação, não uma solução definitiva. A pequena dimensão amostral, a quantidade de parâmetros, a possível endogeneidade do crescimento populacional e a influência de unidades extremas recomendam que as magnitudes sejam submetidas a testes de sensibilidade antes de qualquer extrapolação substantiva.

Como a unidade de observação é o estado, a interpretação dos coeficientes deve permanecer no nível agregado e não ser transportada automaticamente para indivíduos ou municípios. A associação entre densidade estadual e PIB per capita, por exemplo, não implica que indivíduos residentes em áreas mais densas tenham necessariamente renda maior; da

mesma forma, o crescimento de um estado pode refletir migração seletiva de pessoas já mais produtivas, e não um efeito da quantidade de habitantes sobre a produtividade. O alcance da inferência é determinado pela escala em que as relações foram estimadas.

Quando lida como um percurso inferencial integrado, a comparação entre modelos mostra como cada etapa acrescenta informação à anterior: o MQO fornece a referência, o Moran residual revela dependência não representada, SAR e SEM formalizam mecanismos alternativos, o SDM incorpora características dos vizinhos e a decomposição de impactos traduz os parâmetros espaciais em efeitos sobre a própria unidade e sobre o sistema. Essa sequência explicita a articulação entre demografia, economia e território sem ultrapassar os limites de uma seção transversal associativa.

A robustez da evidência passa a ser o problema central depois que a especificação espacial principal é estabelecida, porque a estabilidade dos resultados pode depender da definição de W , de observações influentes, de endogeneidade e da escala geográfica. O capítulo seguinte examina essas fontes de sensibilidade para separar regularidades relativamente persistentes de conclusões que se sustentam apenas sob escolhas específicas de modelagem.

CAPÍTULO 8 — ROBUSTEZ, LIMITES E IMPLICAÇÕES PARA POLÍTICAS PÚBLICAS

A combinação entre forte conteúdo visual e estrutura paramétrica pode fazer resultados espaciais parecerem mais robustos do que os dados efetivamente permitem sustentar, sobretudo em amostras pequenas, nas quais a matriz de pesos, a forma funcional e o tratamento de observações influentes podem alterar de maneira sensível os coeficientes. A robustez precisa, por isso, integrar o próprio desenho empírico como avaliação sistemática das hipóteses que sustentam a especificação.

A primeira robustez diz respeito à matriz W . A contiguidade utilizada no capítulo anterior representa proximidade administrativa física. Para verificar se as conclusões dependem demais dessa regra, pode-se estimar modelos com distância inversa, k vizinhos mais próximos ou outras estruturas plausíveis. Se $W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(3)}$ são matrizes alternativas, uma análise de sensibilidade compara

$$\hat{\theta}^{(m)} = f(y, X, W^{(m)}), \quad m = 1, 2, 3$$

Em exercícios de robustez, não se espera que matrizes de conectividade distintas produzam coeficientes numericamente idênticos, porque a própria hipótese de interação territorial foi alterada. Alguma variação é, portanto, compatível com a lógica do procedimento; o sinal de alerta surge quando a conclusão substantiva se inverte diante de alternativas próximas sem que exista justificativa teórica para a mudança.

A primeira dimensão de robustez consiste em reestimar o modelo sob matrizes de pesos alternativas que representem mecanismos plausíveis de interação. Contiguidade, vizinhos mais próximos e distância inversa não precisam produzir parâmetros idênticos, pois codificam redes distintas. O critério relevante é verificar se sinais, ordens de magnitude e conclusões substantivas permanecem razoavelmente estáveis quando a definição de vizinhança é modificada de forma defensável.

A estabilidade empírica deve ser entendida como preservação das conclusões substantivas diante de alternativas plausíveis, e não como invariância numérica dos parâmetros. Como W integra a própria hipótese do modelo, alguma oscilação é esperada; mudanças abruptas de sinal, magnitude ou interpretação diante de matrizes semelhantes, contudo, revelam dependência excessiva da especificação espacial e recomendam conclusões mais cautelosas.

Com apenas 27 UFs, a influência de observações singulares precisa ser examinada explicitamente, sobretudo porque o Distrito Federal combina PIB per capita e densidade excepcionais e estados como Mato Grosso, Roraima e São Paulo também apresentam combinações pouco usuais de variáveis. Uma estratégia transparente consiste em reestimar o

modelo em procedimento leave-one-out, retirando uma unidade por vez e avaliando a estabilidade das estimativas.

Se $\hat{\theta}$ é o parâmetro na amostra completa e $\hat{\theta}_{(-i)}$ a estimativa sem a unidade i , define-se, por exemplo,

$$\Delta_i = \hat{\theta}_{(-i)} - \hat{\theta}$$

Um gráfico de Δ_i mostra quais UFs mais alteram o resultado. A técnica é especialmente útil em amostras pequenas porque não depende de supor que a influência de uma unidade extrema seja bem resumida por uma estatística assintótica.

A possibilidade de endogeneidade torna-se especialmente importante quando o crescimento populacional é utilizado para explicar desempenho econômico, pois a direção da relação pode operar no sentido inverso. Se pessoas migram para estados com maior renda ou emprego, parte da correlação positiva entre crescimento e PIB per capita reflete seleção espacial da população e não necessariamente um efeito do crescimento demográfico sobre o produto. Em símbolos, se

$$g_i = \gamma_0 + \gamma_1 y_i + v_i$$

e simultaneamente

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 g_i + u_i$$

então g_i é correlacionado com u_i e MQO — espacial ou não — não identifica β_1 sem hipóteses adicionais. Instrumentos, defasagens temporais, choques exógenos, painéis ou desenhos quase-experimentais podem ser necessários.

Ao incorporar interações entre unidades, a dimensão espacial também amplia os desafios de identificação causal, uma vez que políticas implementadas em um estado podem alterar resultados nos vizinhos e violar a hipótese de ausência de interferência comum a desenhos mais simples. Um investimento rodoviário em A, por exemplo, pode modificar emprego em B e gerar um transbordamento que o tratamento binário convencional não representa. Modelos espaciais descrevem esse tipo de spillover, mas sua interpretação causal depende da regra de exposição e das hipóteses sobre propagação.

Como os dados utilizados são agregados no nível estadual, a inferência precisa evitar a falácia ecológica que ocorreria ao transportar relações entre UFs para indivíduos ou unidades geográficas menores. Uma associação entre maior densidade estadual e maior PIB per capita não implica que indivíduos em municípios densos sejam mais produtivos em razão da densidade, pois o coeficiente descreve relações entre agregados. Investigações sobre mecanismos individuais exigem microdados ou, no mínimo, modelos multinível capazes de separar fontes de variação em escalas distintas.

Relacionado a isso está o problema da unidade de área modificável, conhecido como MAUP. Resultados podem mudar quando a mesma realidade é agregada em estados, mesorregiões, microrregiões ou municípios. A matriz W também muda com a escala. Um fenômeno que parece espacialmente suave em nível estadual pode revelar clusters e outliers muito diferentes em nível municipal. Portanto, a escolha da unidade territorial deve ser defendida substantivamente, não apenas por disponibilidade de dados.

Os painéis espaciais oferecem uma extensão natural. Com estados observados ao longo de $t = 1, \dots, T$, pode-se escrever

$$y_{it} = \rho \sum_j w_{ij} y_{jt} + x_{it}'\beta + \mu_i + \tau_t + \varepsilon_{it}$$

em que μ_i são efeitos fixos estaduais e τ_t efeitos temporais comuns. Essa estrutura separa heterogeneidade permanente de variações ao longo do tempo e aumenta o número de observações, embora introduza novos desafios de dinâmica, defasagens, endogeneidade e tratamento da matriz espacial.

Nos painéis com efeitos fixos, a transformação within remove de cada variável sua média temporal específica da unidade. Esse procedimento elimina componentes invariantes no tempo e faz a estimação depender das variações internas de cada estado. A vantagem é controlar heterogeneidade permanente não observada que poderia estar correlacionada com as covariáveis, embora permaneçam problemas de simultaneidade e dependência espacial dinâmica.

A interpretação dos coeficientes de efeitos fixos é, portanto, intragrupo: eles descrevem como mudanças de uma variável dentro da mesma unidade ao longo do tempo se associam a mudanças no resultado, depois de removidos fatores permanentes. Em aplicações demográficas, essa estrutura ajuda a separar diferenças históricas entre estados de choques e transições ocorridos durante o período observado.

Para a análise demográfica, painéis também permitem separar transições de longo prazo de choques de curto prazo. A densidade muda lentamente em alguns estados, enquanto migração e crescimento podem responder rapidamente ao ciclo econômico. Variáveis defasadas podem ajudar a ordenar temporalmente as relações, embora não resolvam automaticamente endogeneidade.

A inferência em amostras espaciais pequenas merece atenção adicional. Valores de p baseados em aproximações assintóticas podem ser imprecisos. Permutações, bootstrap espacial compatível com a dependência e simulações de Monte Carlo podem avaliar tamanho e potência dos testes sob a estrutura específica do estudo. Em qualquer caso, intervalos de confiança e estabilidade de magnitude são preferíveis à leitura binária “significativo/não significativo”.

8.1 O que os resultados sugerem para políticas

Mesmo sem identificação causal, os padrões espaciais têm implicações práticas porque o planejamento estadual isolado pode ignorar interdependências importantes. Se o crescimento populacional nas unidades vizinhas se associa ao desempenho local, políticas de infraestrutura, mobilidade, qualificação e desenvolvimento regional podem gerar efeitos que ultrapassam a jurisdição responsável por financiá-las, criando fundamento econômico para formas de coordenação federativa.

A existência de spillovers implica que a avaliação econômica de uma política pode diferir conforme o horizonte institucional considerado. Uma intervenção financiada por uma unidade pode produzir parte de seus benefícios em estados vizinhos, fazendo com que o retorno social regional seja superior ao retorno apropriado pela jurisdição responsável pelo gasto. Essa divergência fornece fundamento para mecanismos de coordenação e cofinanciamento quando as externalidades territoriais são economicamente relevantes.

A econometria espacial não substitui uma análise de bem-estar nem identifica automaticamente o valor das externalidades, mas pode revelar a presença e a direção de interdependências que justificam investigação adicional sobre benefícios compartilhados, mecanismos de compensação e desenho federativo de políticas.

No campo demográfico, a necessidade de coordenação regional torna-se visível quando fluxos migratórios redistribuem entre estados a demanda por saúde, educação, habitação e transporte. Uma unidade que perde jovens pode experimentar envelhecimento mais rápido, enquanto a receptora precisa absorver maior procura por serviços e infraestrutura; se políticas de emprego ou habitação alteram esses fluxos, seus efeitos acabam se propagando pelo sistema de vizinhança.

À luz desses limites, os resultados do capítulo 7 devem ser lidos sobretudo como evidência de interdependência institucional e territorial: o padrão espacial do PIB per capita e a redução do Moran residual após a introdução dos modelos espaciais mostram que a geografia contém informação relevante, enquanto o SDM indica que o crescimento demográfico das unidades vizinhas merece consideração em análises de desenvolvimento. Esses achados não autorizam definir uma "meta ótima" de crescimento populacional nem atribuir retorno causal à atração de moradores; sua utilidade está em formular perguntas mais precisas e orientar desenhos empíricos adicionais.

8.2 Um protocolo replicável de análise

Uma investigação espacial replicável deve começar pela definição da unidade geográfica, do período e do mecanismo substantivo que justifica a matriz W ; em seguida, é

necessário documentar fontes, denominadores, transformações e compatibilidade temporal, descrever distribuição, assimetria e influência, medir autocorrelação global e local, estimar um modelo de referência e apenas então introduzir especificações espaciais compatíveis com a teoria e com os diagnósticos. A etapa final confronta a especificação central com matrizes alternativas, exclusões de observações e formas funcionais distintas.

Ao explicitar previamente o mecanismo esperado para SAR, SEM ou SDM, a sequência de modelagem reduz o risco de selecionar retrospectivamente a especificação que produz o resultado mais conveniente. Critérios de informação e testes de restrição passam, então, a exercer função de confronto entre hipóteses previamente formuladas, em vez de substituir a justificativa teórica pela busca oportunista do melhor ajuste.

A reprodutibilidade depende de uma apresentação que documente, no próprio percurso metodológico, as escolhas capazes de alterar os resultados. Tabelas devem informar definição das variáveis, unidade, período, fonte e normalização de W ; modelos com multiplicadores precisam apresentar impactos diretos e indiretos; mapas e gráficos devem preservar escalas e critérios de classificação; e códigos, bases e versões de pacotes precisam ser registrados sempre que possível. Essa transparência integra o método porque permite verificar como decisões de mensuração e especificação se traduzem nos resultados finais.

A lógica que atravessa o volume consiste em decompor resultados agregados em componentes interpretáveis: a variação populacional foi separada em crescimento natural e migração, o produto por habitante em produtividade e ocupação, a dependência espacial em estrutura de pesos e mecanismos econométricos e os parâmetros do SDM em impactos diretos, indiretos e totais. A qualidade da análise depende da correspondência entre essa decomposição formal e o processo substantivo que se pretende representar.

8.3 Monte Carlo, reamostragem e transparência inferencial

Em pequenas amostras, simulação pode ajudar a compreender o comportamento do estimador. Um experimento de Monte Carlo começa fixando um processo gerador de dados. Para um SAR, por exemplo,

$$y^{(r)} = (I - \rho W)^{-1}(X\beta + \varepsilon^{(r)}), \quad \varepsilon^{(r)} \sim N(0, \sigma^2 I)$$

Repete-se a geração e estimação R vezes. Se $\hat{\rho}^{(r)}$ é a estimativa na repetição r , o viés Monte Carlo é

$$Bias(\hat{\rho}) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \hat{\rho}^{(r)} - \rho$$

O erro quadrático médio é

$$EQM = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R (\hat{\rho}^{(r)} - \rho)^2$$

Em experimentos de Monte Carlo, viés e erro quadrático médio devem ser avaliados com número suficientemente grande de repetições para reduzir o ruído de simulação. O viés mede o afastamento médio do estimador em relação ao parâmetro verdadeiro, enquanto o EQM incorpora simultaneamente viés e variabilidade. A comparação dessas medidas entre tamanhos amostrais e intensidades de dependência espacial permite identificar condições em que aproximações assintóticas se tornam pouco confiáveis.

O bootstrap espacial requer mais cuidado do que reamostrar estados independentemente, porque a dependência é parte do processo. Uma estratégia paramétrica ajusta o modelo, reamostra inovações independentes e reconstrói y^* através do multiplicador espacial. No SAR,

$$y^* = (I - \hat{\rho}W)^{-1}(X\hat{\beta} + \varepsilon^*)$$

Reestimar o modelo em cada y^* fornece uma distribuição empírica dos parâmetros e impactos. Esse procedimento preserva a estrutura espacial postulada pelo modelo, ao contrário de simplesmente embaralhar observações completas.

A reprodutibilidade exige registrar sementes aleatórias, versões de pacotes, fonte de shapefiles e regras de tratamento de ilhas e fronteiras. Pequenas decisões podem alterar W . Um estado insular ou um polígono com erro topológico pode ficar sem vizinhos; uma fronteira simplificada pode desaparecer. Documentar essas escolhas é tão importante quanto documentar a fórmula do estimador.

Os exercícios de robustez contribuem para a interpretação quando destacam quais conclusões permanecem estáveis e quais dependem das escolhas de modelagem. Uma tabela central pode reunir as especificações principais, enquanto resultados complementares documentam matrizes alternativas, análises leave-one-out e transformações de variáveis; no texto, o foco deve recair sobre as mudanças substantivamente relevantes, evitando a acumulação de resultados sem ganho analítico correspondente.

8.4 Da evidência quantitativa à decisão pública

A utilidade de um modelo para a decisão pública depende da correspondência entre a pergunta formulada e o tipo de inferência que os dados permitem produzir. O diagnóstico espacial identifica desigualdades e interdependências, a projeção condiciona trajetórias a hipóteses e a avaliação causal requer contrafactual e desenho de identificação; embora possam compartilhar variáveis e técnicas, esses objetivos não são intercambiáveis, e recomendações de política precisam respeitar o nível inferencial efetivamente sustentado pela evidência.

A aplicação espacial desenvolvida neste volume pertence principalmente ao campo do diagnóstico e da modelagem associativa: a distribuição estadual do produto por habitante apresenta estrutura geográfica e as características das unidades vizinhas acrescentam informação à especificação. Uma avaliação causal de políticas regionais exigiria definir tratamento, contrafactual e formas de interferência entre unidades, reconhecendo que os resultados potenciais podem depender tanto da exposição própria quanto da configuração da rede.

Para a gestão pública, a implicação é tratar indicadores estaduais dentro de seu contexto regional, já que crescimento populacional, pressão sobre serviços, emprego e renda podem atravessar fronteiras administrativas. A estatística espacial transforma essa interdependência em rotina de monitoramento, enquanto desenhos causais posteriores podem estimar efeitos de intervenções específicas; a sequência analítica adequada parte do diagnóstico, explicita o mecanismo, estabelece uma estratégia de identificação e somente então sustenta recomendações.

Incorporar a robustez à própria inferência significa ajustar a força das conclusões à estabilidade dos resultados diante de hipóteses alternativas plausíveis. Estimativas muito sensíveis a pequenas alterações de matriz, amostra ou especificação justificam afirmações mais restritas, enquanto regularidades preservadas em diferentes exercícios ganham maior credibilidade descritiva, impedindo que sofisticação formal seja confundida com certeza empírica.

CONCLUSÕES GERAIS

O percurso desenvolvido ao longo do volume conecta demografia formal, estatística e econometria espacial em uma sequência única de investigação. A equação compensadora organiza a mudança populacional como resultado de fluxos, as medidas de fecundidade, mortalidade e sobrevivência mostram como esses fluxos remodelam a estrutura etária, as projeções transportam essa estrutura no tempo, a regressão condiciona associações e a matriz de pesos explicita a posição de cada unidade em uma rede territorial. Essa sequência converge para uma ideia central: quando a unidade de análise é regional, população, economia e espaço precisam ser modelados de maneira compatível.

A decomposição das medidas agregadas constitui uma lição metodológica central, pois indicadores sintéticos podem reunir mecanismos demográficos de natureza muito distinta. O crescimento populacional combina, em proporções variáveis, crescimento natural e migração; taxas brutas podem mudar em razão da composição etária; e projeções totais podem esconder erros compensatórios entre coortes. Identificar esses componentes antes da estimação econômica reduz o risco de atribuir significado causal a indicadores que, na realidade, resumem processos heterogêneos.

Ao passar da demografia para a economia dos estados, a estatística descritiva e o MQO evidenciaram a amplitude da heterogeneidade e forneceram uma referência não espacial, enquanto o índice de Moran mostrou que o PIB per capita não se distribui aleatoriamente no território e que a regressão convencional deixa autocorrelação positiva nos resíduos. Esse diagnóstico fornece a justificativa empírica para incorporar explicitamente a vizinhança à especificação econométrica.

A comparação entre SAR, SEM e SDM mostrou que localizar a dependência espacial em partes diferentes do modelo produz interpretações também diferentes: o SAR representa realimentação do resultado, o SEM modela correlação entre choques e o SDM incorpora, além disso, características observadas das unidades vizinhas. Na amostra analisada, o SDM apresentou o menor AIC e permitiu decompor as associações em impactos diretos e indiretos, oferecendo a representação mais informativa entre as especificações consideradas, sem que isso elimine os limites da pequena amostra e da natureza associativa do exercício.

Mesmo diante de diagnósticos espaciais coerentes e de regularidades preservadas na comparação entre modelos, o alcance dos resultados continua condicionado por limitações importantes: a seção transversal contém apenas 27 unidades, a matriz de contiguidade representa uma entre várias hipóteses possíveis de interação, o crescimento populacional pode responder ao próprio desempenho econômico e observações como o Distrito Federal possuem

elevado potencial de influência. A evidência deve, portanto, ser interpretada como diagnóstico espacial e associação condicional, e não como identificação causal de retornos do crescimento demográfico.

Em termos substantivos, os indicadores demográficos adquirem significado econômico quando são lidos em sua composição e em seu contexto territorial. Densidade aproxima a intensidade de ocupação, mas não substitui urbanização ou aglomeração; crescimento populacional pode reunir fecundidade, sobrevivência e migração; e PIB per capita combina produtividade, participação laboral, estrutura setorial e instituições. A proximidade espacial conecta essas dimensões e cria canais pelos quais choques e características podem se transmitir entre unidades.

Do ponto de vista metodológico, a sofisticação do estimador não compensa inconsistências conceituais ou de mensuração, razão pela qual datas de referência, denominadores, escala geográfica, transformações e construção de W precisam ser definidos antes da estimação. Modelos espaciais são úteis quando representam mecanismos plausíveis e melhoram o diagnóstico, mas sua interpretação permanece condicionada à qualidade das medidas e das hipóteses que entram no sistema.

Entre as extensões capazes de aprofundar a análise estão abordagens que acrescentem dimensão temporal, maior resolução geográfica e estratégias mais fortes de identificação. Painéis estaduais podem controlar heterogeneidade permanente e explorar dinâmica temporal; escalas municipais ou regionais intermediárias permitem examinar a sensibilidade ao MAUP e observar aglomerações com maior detalhe; estratégias de identificação podem enfrentar a endogeneidade de migração e crescimento; e matrizes baseadas em mobilidade, comércio ou transporte podem aproximar a rede econômica efetiva de maneira mais direta do que a contiguidade física.

Essas extensões convergem para um princípio metodológico: a análise quantitativa deve preservar a correspondência entre pergunta, medida, unidade espacial, hipótese de interação e interpretação. O valor dos métodos não está na simples acumulação de técnicas, mas na capacidade de tornar explícitos os mecanismos e as incertezas que estruturam a evidência; quando essa coerência é preservada, demografia e economia regional podem ser examinadas em um mesmo arcabouço empírico com maior precisão descritiva e limites inferenciais claramente definidos.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Eduardo. *Econometria espacial aplicada*. Campinas: Alínea, 2012.
- ANSELIN, Luc. *Spatial econometrics: methods and models*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988.
- ANSELIN, Luc. Local indicators of spatial association — LISA. *Geographical Analysis*, Columbus, v. 27, n. 2, p. 93–115, 1995.
- BAILEY, Trevor C.; GATRELL, Anthony C. *Interactive spatial data analysis*. Harlow: Longman, 1995.
- BIVAND, Roger S.; PEBESMA, Edzer; GÓMEZ-RUBIO, Virgilio. *Applied spatial data analysis with R*. 2. ed. New York: Springer, 2013.
- BUSSAB, Wilton de Oliveira; MORETTIN, Pedro Alberto. *Estatística básica*. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.
- CARVALHO, José Alberto Magno de; SAWYER, Diana Oya; RODRIGUES, Roberto do Nascimento. *Introdução a alguns conceitos básicos e medidas em demografia*. 2. ed. São Paulo: Associação Brasileira de Estudos Populacionais, 1998.
- CLIFF, Andrew D.; ORD, J. Keith. *Spatial processes: models & applications*. London: Pion, 1981.
- CRESSIE, Noel. *Statistics for spatial data*. Rev. ed. New York: Wiley, 1993.
- ELHORST, J. Paul. *Spatial econometrics: from cross-sectional data to spatial panels*. Berlin: Springer, 2014.
- HAKKERT, Ralph. *Fontes de dados demográficos*. Belo Horizonte: ABEP, 1996.
- IBGE — INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. *Censo Demográfico 2022: população e domicílios — primeiros resultados*. Rio de Janeiro: IBGE, 2023.
- IBGE — INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. *Projeções da população: Brasil e unidades da Federação: revisão 2024 — notas metodológicas*. Rio de Janeiro: IBGE, 2024.
- IBGE — INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. *Projeções da população: Brasil e unidades da Federação: revisão 2024*. 3. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2025a.
- IBGE — INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. *Sistema de Contas Regionais: Brasil 2023*. Rio de Janeiro: IBGE, 2025b.
- LESAGE, James P.; PACE, R. Kelley. *Introduction to spatial econometrics*. Boca Raton: CRC Press, 2009.
- MORAN, P. A. P. Notes on continuous stochastic phenomena. *Biometrika*, Oxford, v. 37, n. 1/2, p. 17–23, 1950.
- PRESTON, Samuel H.; HEUVELINE, Patrick; GUILLOT, Michel. *Demography: measuring and modeling population processes*. Oxford: Blackwell, 2001.
- WOOLDRIDGE, Jeffrey M. *Introductory econometrics: a modern approach*. 7. ed. Boston: Cengage, 2020.

Agradecimentos: o autor agradece aos professores Dr. Ivan Castelar, Dr. Gildemir Ferreira e Dr. Eiji Kurozumi pelos ensinamentos e pelas discussões sobre ciência e modelos econométricos, que contribuíram para amadurecer as ideias desenvolvidas neste livro.

Eventuais erros ou imprecisões remanescentes são de inteira responsabilidade do autor.



9786583199812 ISBN 978-65-83199-81-2

